N3300 Tipsă
Biblioteca „ASTRA"
— SIBIU —
8769

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL XI. No. 4 1 IANUARIE 1945

22
124
6,20 7
9640 83510

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 7-3808

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL XI. No. 4 — 1 IANUARIE 1945

ABONAMENTUL LEI 300 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

BCU 1111 2014

PUNCTE INVERSE

1. **Drepte izogonale.** *Două drepte* Ou, Ov *sunt izogonale în unghiul* xOy, *dacă fac unghiuri egale respectiv cu laturile* Ox, Oy *ale unghiului.*

Astfel, *într'un triunghiu* ABC, *înălţimile şi diametrii cercului circumscris cari trec prin* A, B, C *formează perechi de ceviene izogonale în unghiurile respective.*

In adevăr, fie A_1 punctul în care înălţimea vârfului A taie latura BC şi A_2 punctul în care diametrul AO al cercului circumscris, taie acest cerc.

Din triunghiul dreptunghiu AA_1B rezultă

$$\sphericalangle A_1AB = 90^0 - \sphericalangle B,$$

iar triunghiul dreptunghiu AA_2C,

$$\sphericalangle A_2AC = 90^0 - \sphericalangle AA_2C = 90^0 - \sphericalangle B.$$

Deci,

$$\sphericalangle A_1AB = \sphericalangle A_2AC.$$

2. **Proprietate.** Fie M, N *două puncte situate respectiv pe dreptele* Ou, Ov *izogonale în unghiul* xOy. *Proiecţiile punctelor* M, N *pe laturile unghiului* xOy *sunt patru puncte situate pe un cerc cu centrul în mijlocul segmentului* MN

Notând M', M'' şi N', N'' proiecţiile punctelor M, N pe Ox, Oy, din patrulaterul inscriptibil MM' OM'', rezultă (în figură s'a notat u, v, M, N astfel ca $\overline{OM} > \overline{ON}$),

$$\sphericalangle OM'M'' = \sphericalangle OMM'' = 90^0 - \sphericalangle MOy;$$

iar din patrulaterul inscriptibil NN'ON'',

$$\sphericalangle ON''N' = \sphericalangle ONN' = 90^0 - \sphericalangle NOx$$

83510

şi cum dreptele Ou, Ov sunt izogonale în unghiul xOy,

$$\sphericalangle MOy = \sphericalangle NOx,$$

deci

$$\sphericalangle OM'M'' = \sphericalangle ON''N',$$

sau

$$\sphericalangle OM'M'' + \sphericalangle N'N''y = 180^0.$$

Aşa dar patrulaterul $M'N'N''M''$ este inscriptibil. $\overline{M'N'}$, $\overline{M''N''}$ fiind coarde în cerc, perpendicularele lor, duse prin mijloc sunt diametrii ai cercului şi cum trec prin P, mijlocul segmentului MN, P este centrul cercului $M'M''N''N'$.

3. **Puncte inverse sau izogonale.** *Dacă se consideră în triunghiul* ABC *trei ceviene concurente, izogonalele lor sunt de asemenea concurente.*

Fie AA', BB', CC' trei ceviene concurente în punctul M şi AA'', BB'', CC'' izogonalele lor.

După teorema lui CEVA [1]),

$$\frac{\sin A'AB}{\sin A'AC} \cdot \frac{\sin B'BC}{\sin B'BA} \cdot \frac{\sin C'CA}{\sin C'CB} = -1.$$

Dar

$$\sphericalangle A'AB = \sphericalangle CAA''$$

şi

$$\sphericalangle A'AC = \sphericalangle BAA'',$$

încât

$$\frac{\sin A'AB}{\sin A'AC} = \frac{\sin A''AC}{\sin A''AB}.$$

Şi ţinând seama de egalităţile analoage, date de perechile de drepte izogonale (BB', BB''), (CC', CC''),

$$\frac{\sin A''AB}{\sin A''AC} \cdot \frac{\sin B''BC}{\sin B''BA} \cdot \frac{\sin C''CA}{\sin C''CB} = -1,$$

---

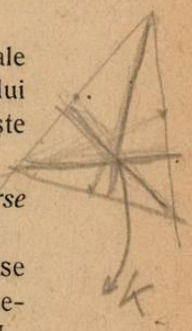
1) „Gazeta Matematică", Supliment cu exerciţii. Vol. XI, Nr. 3.

iar după reciproca teoremei lui CEVA, dreptele AA″, BB″, CC″ sunt concurente. Fie N punctul lor de întâlnire.

Punctele M, N *ale căror ceviene sunt izogonale, în unghiurile respective, se numesc puncte inverse* [1]) *sau izogonale.*

Astfel, având în vedere cele arătate la punctul 1°, *inversul ortocentrului este centrul cercului circumscris.*

4. **Punctul lui Lemoine.** Izogonalele celor trei mediane ale unui triunghiu sunt trei ceviene numite *simediane.* Inversul centrului de greutate G, adică punctul de întâlnire al simedianelor se numeşte *punctul lui* LEMOINE [2]) şi se notează obişnuit *k.*



5. **Proprietate.** *Triunghiurile podare* [3]) *a două puncte inverse sunt înscrise în acelaşi cerc.*

Fie (M_a, N_a), (M_b, N_b), (M_c, N_c) proiecţiile punctelor inverse M, N pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC. Din proprietatea dreptelor izogonale, arătate la 2°, rezultă că M_a, N_a, M_b, N_b, M_c, N_c se află pe un cerc cu centrul în mijlocul segmentului MN.

6. **Proprietate.** A′, B′, C′ *fiind intersecţiile laturilor* (M_bM_c, N_bN_c), (M_cM_a, N_cN_a), (M_aM_b, N_aN_b) *ale triunghiurilor podare a două puncte inverse* M, N *dreptele* AA′, BB′, CC′ *sunt paralele* [4]).

In adevăr, A′ fiind intersecţia coardelor M_bM_c, N_bN_c în cercul circumscris triunghiurilor podare,

$$\overline{A'M_b} \times \overline{A'M_c} = \overline{B'N_b} \times \overline{B'N_c},$$

deci A′ având puteri egale faţă cu cercurile AM_bMM_c, AN_bNN_c, dreapta AA′ este axa lor radicală, aşa dar este perpendiculară pe dreapta centrelor, adică pe dreapta ce uneşte mijloacele diametrilor AM, AN ai celor două cercuri sau pe paralela acesteia, MN.

Analog se arată că BB′, CC′ sunt perpendiculare pe MN.

C. IONESCU-BUJOR.

---

1) Punctele se numesc inverse pentrucă x, y, z fiind 3 numere proporţionale cu distanţele punctului M la BC, CA, AB inversele lor, $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ sunt proporţionale cu distanţele lui N la aceleaşi laturi.

2) EMIL LEMOINE, politehnician, a descoperit din 1873 mai multe proprietăţi în Geometria triunghiului.

3) „Gazeta Matematică", Supliment cu exerciţii. Vol. XI, Nr. 2.

4) C. IONESCU-BUJOR. Curierul Matematic. Vol. II. Nr. 10.

EXERCIŢII REZOLVATE

Exerciţii Generale. *Exerc. 605. In şirul primelor* N *numere avem* m *numere prime, unde :*

$$m = n + I_N [2 . 3 . 5 \ldots (\sqrt{N})]$$

n *reprezentând numărul factorilor primi din paranteză şi* $(\sqrt{N})$ *reprezentând numărul prim imediat inferior lui* $\sqrt{N}$.

I. L.

Numărul numerelor prime cu paranteza (produsul primelor $(\sqrt{N})$ numere prime) din şirul de numere consecutive până la N reprezintă însăşi numărul numerelor prime, deoarece ele nu pot avea alt divizor, nici mai mic decât $(\sqrt{N})$, căci el n'ar mai fi prim cu paranteza, nici mai mare căci atunci ar fi mai mare ca N. Bine înţeles, nu intră în această categorie factorii primi ai lui N, cari sunt cuprinşi printre cei din paranteză.

Exemplu numeric pentru N = 100, avem $n = 4$ şi $(\sqrt{N}) = 7$, atunci :

$$m = 4 + I_{100} (2 . 3 . 5 . 7)$$

$$= 4 + 100 - \left[E\left(\frac{100}{2}\right) + E\left(\frac{100}{3}\right) + E\left(\frac{100}{5}\right) + E\left(\frac{100}{7}\right)\right]$$

$$+ \left[E\left(\frac{100}{2.3}\right) + E\left(\frac{100}{2.5}\right) + E\left(\frac{100}{2.7}\right) + E\left(\frac{100}{3.5}\right) + E\left(\frac{100}{3.7}\right) + E\left(\frac{100}{5.7}\right)\right]$$

$$- \left[E\left(\frac{100}{2.3.5}\right) + E\left(\frac{100}{2.3.7}\right) + E\left(\frac{100}{2.5.7}\right) + E\left(\frac{100}{3.5.7}\right)\right]$$

$$+ \left[E\left(\frac{100}{2.3.5.7}\right)\right]$$

$$= 4 + 100 - (50 + 33 + 20 + 14)$$
$$+ (16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2)$$
$$- (3 + 2 + 1 + 0)$$
$$+ 0$$

$$= 4 + 100 - 117 + 45 - 6 = 26.$$

E. G. 606. In ce caz numărul divizorilor bipatratului lui $5^{\alpha}.17^{\beta}$ *care are trei cifre, este egal cu triunghiul numărului divizorilor patratului lui?*

I. L.

Trebue să avem:

$$(4\alpha+1)\ (4\beta+1) = 3\,(2\alpha+1)\ (2\beta+1) \quad \therefore \quad 2\alpha\beta = \alpha+\beta+1.$$

De unde: $\alpha = 1, 2$ şi $\beta = 1, 1$ pentru trei cifre avem: $\alpha = 2$ şi $\beta = 1$ deci numărul va fi 425.

E. G. 607. Dacă s (i) *reprezintă suma divizorilor lui* i, *atunci avem:*

$$s\,(n!) < 2^{n-1}\,.\,n!$$

I. L.

Ştim că: $s\,(x) < x\,.\,n\,(x)$ unde $n\,(x)$ reprezintă numărul divizorilor lui x. Dacă facem: $x = n!$ şi cum ştim că: $n\,(n!) < 2^{n-1}$, atunci dăm peste neegalitatea din enunţ.

E. G. 608. Dacă p (i) *reprezintă produsul divizorilor numărului* i, *avem:*

$$p\,(n!) < (n!)^{2^{n-2}}.$$

I. L.

Avem: $p\,(n!) < (n!)^{\frac{1}{2}\,n\,(n)}$, deci cum $n\,(n!) < 2^{n-1}$, dăm peste neegalitatea din enunţ.

E. G. 609. Dacă p *este un număr prim şi* m *un întreg pozitiv, atunci:*

$$\frac{(2m \,.\, p)!}{(2m)!\; p^{2m}} = \mathcal{M}_p + 1$$

I. L.

Dacă $P_y(x)$ reprezintă produsul numerelor prime cu x din şirul de numere consecutive până la y, atunci avem:

$$P_{2mp}(p) = \frac{(2mp)!}{(2m)!\; p^{2m}}.$$

Fie:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ (p-1)$$

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ (2p-1)$$

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots\ (3p-1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$l_1,\ l_2,\ l_3,\ \ldots\ (2mp-1)$$

numerele prime cu p din şirul numerelor până la $2mp$. Dacă împărţim aceste numere cu p, atunci fiecare linie va da drept resturi numerele: 1, 2, 3, ... $(p-1)$, într'o ordine oarecare. Apoi cum după teorema lui WILSON avem:

$$(p-1)! + 1 = \mathcal{M}_p$$

atunci:

$$P_{2mp}(p) = [\mathcal{M}_{p-1}]^{2m} = \mathcal{M}_{p+1}.$$

Observaţie. In enunţ a fost scris $2m$ în loc de $(2m)!$, adică avem în realitate:

$$(2m-1)!\; P_{2mp}(p)$$

ceeace nu schimbă cu nimic.

E. G. 610. Dacă $I_x(y)$ *reprezintă numărul numerelor prime cu* y *din şirul până la* x, *atunci pentru* a, b *primi, avem:*

$$2I_n(a \cdot b) < I_n(a) + I_n(b)$$

I. L.

Ştim că: $I_n(a \cdot b) < I_n(a)$ sau $I_n(b)$, adunând dăm peste neegalitate.

Până la 1 Decembrie 1944 s'au primit soluţii bune la exerciţiile publicate în Nr. 1, 2, 3 dela:

Liceul „Matei Basarab", Bucureşti.

Clasa a VIII-a: Ieşan A. (VIII: 709, 10, 1, 2, E. G.: 643, 4, 6, 7, 8, 52, 3), Muntz M. E. (VIII: 709, 10, 1, 2).

Liceul „Cantemir Vodă", Bucureşti.

Clasa a VI-a: Chiriţă I. I. (VI: 858, 9, 61, 2, 5).

Şcoala Centrală de fete, Bucureşti.

Clasa a VI-a: Dumitrescu I. Aurelia (VI: 858).
Clasa a VII-a: Halunga O. Cruciţa (VII: 806, 7).
Clasa a VIII-a: Boldescu I. Valeria (VIII: 709, 10), Popescu D. Ligia (VIII: 709, 10), Simionescu I. Lygia (VIII: 709, 10), Stoenescu A. Felicia (VIII: 709, 11), Ţeican D. Maria (VIII: 709, 10, 2).

Liceul de fete „Iulia Haşdeu", Bucureşti.

Clasa a VI-a: Stănescu A. Maria Maglalena (VI: 857, 60, 2, 5, E. G.: 651, 2, 4).

Liceul „Gheorghe Lazăr", Bucureşti.

Clasa a VI-a: Chirilă A. R. (VI: 854).

Liceul „Titu Maiorescu", Bucureşti.

Clasa a IV-a: Rasidescu Ş. (IV: 710, 2, 3).
Clasa a VI-a: Cojocaru I. A. (VI: 854, 66), Doneaud E. A. (VI: 854, 5, 7, 9), Munteanu I. G. L. (VI: 857, 66), Rasidescu C. M. (VI: 866), Seni D. (VI: 854, 7, 66), Vasile G. G. (VI: 866).
Clasa a VIII-a: Codreanu A. N. (VIII: 709, 10, 2), Corbaru V. (VIII: 709, 10, 1, 2, 7, 9, 20).

Colegiul Național „Sf. Sava", București.

Clasa a VI-a: Dumitrescu F. S. (VI: 856).
Clasa a VII-a: Săvescu A. M. (VII: 804, 6, 7).
Clasa a VIII-a: Soare V. M. (E. G.: 643, 6, 7, 8, 9, 50).

Liceul „Aurel Vlaicu", București.

Clasa a VII-a: Barbaiani A. M. (VII: 803, 6, VIII: 709, E. G.: 643, 4, 6, 7, 8, 9, 51), Leon A. M. (E. G.: 643, 6, 7, 8, 9, 50, 1).

Liceul Internat, Buftea.

Clasa a IV-a: Tănăsescu C. M. (IV: 708, 10, 1, 4, V: 846, VI: 860, E. G.: 646, 7, 8, 9, 50).

Colegiul Național „Carol I", Craiova.

Clasa a VII-a: Brașoveanu D. G. (VII: 803, 4, 8, E. G.: 652).

Colegiul Național „N. Filipescu", Predeal.

Clasa a IV-a: Ciubotaru C. I. (IV: 711, 2), Grigoriu I. D. (IV: 711, 2, 3, 4, V: 845, E. G.: 843), Moțoiu S. M. (IV: 711, 3, 4), Sârbu L. (IV: 711, 2), Vasile D. M. (IV: 711, 2).
Clasa a VIII-a: Columbeanu D. P. (VIII: 717, 8, 9, 20).

EXERCIȚII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Aprilie 1945

Clasa a III-a. *Exerc. 273.* Se dă un cerc (C) cu centrul C și doi diametri perpendiculari $\overline{OA}$ și $\overline{BD}$. Să se construiască o coardă AM, astfel ca dreapta care unește mijlocul coardei $\overline{AB}$ cu punctul O să fie paralelă cu BM.

O. N. Ț.

III. 274. Se dă cercul (O) cu raza 5,5 cm şi exagonul regulat ABCDEF înscris în cercul (O). Construim pe laturile exagonului, către exterior, triunghiurile echilaterale AA'B, BB'C, CC'D, DD'E, EE'F, FF'A şi fie A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 intersecţiile perechilor de drepte (F'A', OA); (A'B', OB); (B'C', OC); (C'D', OD); (D'E', OE); (E'F'. OF). Să se arate:

a) Că exagoanele A'B'C'D'E'F' şi $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ sunt poligoane regulate;

b) Raportul ariilor acestor exagoane regulate către aria exagonului dat.

O. N. Ţ.

III. 275. Dacă într'un patrulater oarecare bisectoarele a două unghiuri opuse se întâlnesc pe diagonala vârfurilor celorlalte două unghiuri opuse, bisectoarele acestora din urmă se întâlnesc asemenea pe diagonala vârfurilor celor dintâi.

O. N. Ţ.

Clasa a IV-a. *Exerc. 719.* Să se verifice că

$$(x+2y)^2+(x+2z)^2 \equiv 2\,[(x+y+z)^2+(y-z)^2].$$

N. M.

IV. 720. Să se pună expresia

$$E \equiv 1056xy + 4420xz + 1089y^2 - 900x^2 - 4225z^2$$

sub forma unei sume algebrice de două patrate perfecte şi să se descompună apoi în factori.

O. N. Ţ.

IV. 721. Să se strângă expresia

$$E \equiv 81x^4 + 16y^4 + 216x^2y^2 - 24xy\,(9x^2 + 4y^2)$$

şi apoi să descompună în factori.

O. N. Ţ.

IV. 722. Să se strângă expresia

$$E \equiv 81x^4 + 625y^4 + 1350x^2y^2 - 540x^3y - 1500xy^3$$

și apoi să se descompună în factori.

O. N. Ț.

Clasa a V-a. *Exerc. 855.* Să se rezolve ecuația

$$(a+b)\left(a+\frac{x}{a-b}\right)-(a-b)\left(a-\frac{x}{a+b}\right)=2ax\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}\right)$$

I. I. S.

V. 856. Să se rezolve ecuația

$$\frac{a^2x}{(1-ax)^2}-\frac{b^2x}{(1-bx)^2}=\frac{2b}{1-bx}-\frac{2a}{1-ax}$$

și să se verifice soluția aflată.

I. I. S.

V. 857. Fie A_1 și A_2 picioarele a două izogonale în triunghiul ABC înscris în cercul (O). Să se demonstreze, că, dacă A, B, C sunt fixe, centrul cercului A_1AA_2 se mișcă pe OA.

Gh. B.

V. 858. Să se construiască un triunghiu ABC cunoscându-i latura $\overline{BC}$ și înălțimile $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ corespunzătoare celorlalte două laturi. Să se calculeze:

a) Lungimile segmentului $\overline{B'C'}$;

b) Lungimile segmentelor determinate pe laturi de înălțimi;

c) Lungimile segmentelor determinate pe înălțimi de punctul lor de întâlnire.

O. N. Ț.

V. 859. Să se construiască trapezul isoscel ABCD, cunoscându-i baza $\overline{BC}$ și segmentele $\overline{AI}$, $\overline{IC}$ ale diagonalei $\overline{AC}$.

Să se calculeze:

a) Aria trapezului ABCD;

b) Perimetrul trapezului ABCD;

c) Distanțele vârfurilor trapezului ABCD la diagonalele lui;

d) Raza cercului ABCD.

O. N. Ț.

Clasa a VI-a. *Exerc. 872.* Să se verifice identitatea:

$$\frac{[4(\sec a+\operatorname{tg} a)(\operatorname{cosec} a+\operatorname{cotg} a)+[1+(\sec a+\operatorname{tg} a)^2][1+(\operatorname{cosec} a+\operatorname{cotg} a)^2]]^2}{(\sec a+\operatorname{tg} a)^2(\operatorname{cosec} a+\operatorname{cotg} a)^2}$$

$$+8\frac{[1+(\sec a+\operatorname{tg} a)^2][1+(\operatorname{cosec} a+\operatorname{cotg} a)^2]}{(\sec a+\operatorname{tg} a)(\operatorname{cosec} a+\operatorname{cotg} a)}$$

$$\cdot\frac{\sec a+\operatorname{cosec} a+\sec a\operatorname{tg} a+\operatorname{cosec} a\operatorname{cotg} a}{(\sec a+\sec a\operatorname{tg} a)(\operatorname{cosec} a+\operatorname{cosec} a\operatorname{cotg} a)}=16(\sin a+\cos a+\operatorname{tg} a+\operatorname{cotg} a)^2.$$

O. N. Ţ.

VI. 873. Ştiind că $\sin a=\frac{1}{26}$, iar $\cos b=\frac{4\sqrt{3}}{13}$ şi că arcele a şi b sunt mai mici ca $\frac{\pi}{2}$, să se găsească suma arcelor a şi b.

O. N. Ţ.

VI. 874. Arcele α şi β, mai mici ca $\frac{\pi}{2}$, sunt date prin

$$\cos\alpha=\frac{p-r}{p+r}\ ,\quad \cos\beta=\frac{(p-r)\sqrt{3}+2\sqrt{pr}}{2(p+r)},$$

unde p, r sunt două numere pozitive, $p>r$.

Să se găsească relaţia dintre arcele α şi β.

O. N. Ţ.

VI. 875. Se consideră o piramidă patrulateră SABCD, în care baza ABCD este un trapez dreptunghiu cu baza mare $\overline{DC}=a$, una din laturile neparalele egală cu suma bazelor trapezului, iar cealalta, înălţimea $\overline{AD}$, egală cu 2R. Vârful S al piramidei se proiectează în O, mijlocul lui $\overline{AD}$, iar $\overline{SO}=h$.

Să se calculeze suprafaţa totală şi volumul piramidei SABCD.

O. N. Ţ.

VI. 876. Să se rezolve ecuația

$$(\sin x + \cos x)^2 - 4\cos^4\frac{x}{2}\sin x = 0.$$

I. I. S.

VI. 877. Să se rezolve ecuația

$$\cos^2 x\,(1 + \sin x)^2 - \cos^2 x - 1 = 0.$$

I. I. S.

Clasa a VII-a. *Exerc. 822.* Fie δ_1, δ_2, δ_3, δ determinanți obținuți din tabloul

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{Vmatrix}$$

suprimând succesiv coloana 1, 2, 3, 4. Avem

$$a_1\delta_1 + a_2\delta_2 + a_3\delta_3 = b_1\delta_1 + b_2\delta_2 + b_3\delta_3 = c_1\delta_1 + c_2\delta_2 + c_3\delta_3 = \delta.$$

N. M.

VII. 823. Să se calculeze suma

$$\sum_1^n C_n^2\, C_{n+1}^2\, C_{n+2}^2,$$

C_i^k fiind numărul combinărilor de i obiecte luate câte k.

O. N. Ț.

VII. 824. Să se calculeze suma

$$\sum_{n=1}^{n} \begin{vmatrix} n^2 & 2n & 1 \\ 1 & n^2 & 2n \\ 2n & 1 & n^2 \end{vmatrix}.$$

O. N. Ț.

VII. 825. Să se calculeze suma

$$\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n^2-1)^3} \begin{vmatrix} n^3 & 3n^2 & 3n & 1 \\ 3n^2 & 3n & 1 & n^3 \\ 3n & 1 & n^3 & 3n^2 \\ 1 & n^3 & 3n^2 & 3n \end{vmatrix}.$$

O. N. Ţ.

VII. 826. Să se descompună în factori determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} n+1 & n-1 & n^2+1 & n^2-1 \\ n^2-1 & n^2-1 & n^4-1 & n^4-1 \\ n^3-n^2-n+1 & n^3+n^2-n-1 & n^6-n^4-n^2+1 & n^6+n^4-n^2-1 \\ n^4-2n^3+2n-1 & n^4+2n^3-2n-1 & n^8-2n^6+2n^2-1 & n^8+2n^6-2n^2-1 \end{vmatrix}.$$

O. N. Ţ.

VII. 827. Ştiind că x, y, z sunt trei numere în progresie aritmetică, să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 2y^2-x^2 & xz & 2y^2-z^2 \end{vmatrix}.$$

C. I. B.

VII. 828. Să se rezolve sistemul

$$x^2(ax+by) = a+c$$

$$x(bx^2+az) = b-c$$

$$x(axy+bz) = a+b.$$

C. I. B.

Clasa a VIII-a. *Exerc. 731.* In sistemul de axe ortogonale OX, OY se dau punctele A (5, 0), B (— 5, 0), $C\left(\frac{5}{3}, \frac{20}{3}\right)$. Dreptele AC şi BC taie cercul $x^2 + y^2 - 25 = 0$, respectiv în punctele S şi T.

a) Să se găsească ecuaţia cercului ce trece prin punctele C, S şi T şi să se arate că acest cerc este ortogonal celui dat.

b) Să se găsească polurile coardei $\overline{ST}$ în raport cu cele două cercuri şi să se găsească proprietăţile acestor puncte faţă cu unul sau altul din cele două cercuri.

GH. P.

VIII. 732. Să se rezolve ecuaţia

$$x^4 - 3x^3 - x^2 + 9x - 18 = 0,$$

ştiind că admite rădăcina $1 - i\sqrt{2}$.

GH. P.

VIII. 733. Să se determine parametrii a şi b astfel ca ecuaţia

$$x^4 + 2ax^3 + 3bx - 2x - a = 0$$

să aibă suma a două rădăcini egală cu — 1, iar produsul celorlalte două rădăcini egal cu $\frac{4}{7}$.

I. I. S.

VIII. 734. Se dă ecuaţia

$$x^3 + \lambda x^2 - 13x + 5\lambda = 0.$$

Să se rezolve ştiind că $x_1 = \lambda x_2$.

I. I. S.

VIII. 735. Ecuaţia cu coeficienţi reali

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

are suma a două rădăcini egală cu suma celorlalte două rădăcini, iar ecuaţia derivată are una din rădăcini egală cu suma celorlalte două. Să se găsească relaţiile între a, b, c. Să se discute natura rădăcinilor ecuaţiei date şi a derivatei, tratându-se cazul particular $a = 0$.

I. I. S.

VIII. 736. Se dau punctele $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $A(x, y)$. Se cere aria triunghiului ABC ştiind că A este mobil şi descrie:

a) O paralelă la BC;

b) O perpendiculară pe BC.

C. I. B.

VIII. 737. Ce reprezintă ecuaţia

$$(1) \qquad \frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'} = k,$$

k fiind un parametru variabil?

Diferitele valori ale lui k fiind abscisele unui punct variabil pe o dreaptă Oz, să se afle ce corespunde din (1) punctelor $A(0)$, $B(1)$, $C(\infty)$, $D\left(\frac{1}{2}\right)$.

C. I. B.

VIII. 738. Se dă cercul

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$$

şi dreapta

$$y = 2x$$

care întâlneşte cercul în A, B.

Să se calculeze lungimea arcului AB al cercului cu 6 zecimale exacte.

C. I. B.

Exerciţii Generale. *Exerc. 672.* Cu cifrele 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, luate câte o singură dată, să se formeze trei numere de câte trei cifre aşa ca *unul* să fie egal cu suma celorlalte două.

GH. B.

E. G. 673. Să se determine numerele prime de trei cifre, abc, ştiind că $ak + c = b$, unde k este un întreg pozitiv.

I. L.

E. G. 674. Să se determine patratele perfecte de patru cifre, *abcd*, știind că

$$a\alpha + \beta b = c + d,$$

α și β fiind întregi pozitivi.

I. L.

E. G. 675. Să se determine cuburile perfecte de patru cifre, *abcd*, știind că $\alpha a + \beta b = c + d$, unde α și β sunt două numere întregi pozitive.

I. L.

E. G. 676. Să se determine numerele prime de patru cifre, *abcd*, știind că

$$\alpha a + \beta b = c + d,$$

α și β fiind două numere întregi pozitive.

I. L.

E. G. 677. Să se rezolve în numere întregi ecuația

$$x^2 + y^2 = z^4.$$

I. L.

E. G. 678. Să se rezolve în numere întregi ecuația

$$x^2 + y^2 = z^6.$$

I. L.

E. G. 679. Să se rezolve în numere întregi ecuația

$$x^n + y^n = z^{n+1}.$$

I. L.

E G. 680. Dacă x, y, z sunt numere pitagorice, atunci nu putem avea niciodată

$$x^n + y^n = z^n,$$

pentru $n > 2$.

I. L.

INSTRUCȚIUNI

Pentru redactarea și trimiterea soluțiunilor exercițiilor publicate în *Gazeta Matematică Supliment cu exerciții* se vor avea în vedere *Instrucțiunile* publicate în numerele 1, 2 și 3 pe copertă.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII și VIII, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității rezolvând și probleme din „Gazeta Matematică".

În Biblioteca Societății „Gazeta Matematică" au apărut și se găsesc următoarele:

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a științifică,* Ediția VIII-a . . . . . Lei 350

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 50

X. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . . . Lei 450

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 500 / pentru abonații G. M. și S. G. M. . . . Lei 300

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 330

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica rațională . . . . . Lei 500

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediția II-a revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 280

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediția IV-a revăzută și mărită . . . . . Lei 350

XVI. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediția II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 400

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediția II-a revăzută și adăogită de **Gabriela Țițeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a (Trigonometrie sferică). Revăzută și adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190

XX. **I. I. Chițulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 300

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană și sferică cu aplicații la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . . Lei 950

XXII. **G. Țițeica,** *Culegere de Probleme de analitică.* Ediția II. Partea II adăogită de **N. G. Botea** și **C. Ionescu-Bujor** . . . . . Lei 600

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile VII—IX de Aritmetică și Cartea X a Iraționalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 350

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile XI—XIII de Geometrie în spațiu: Cartea XIV a lui HYPSICLE și Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"

(Tipărită din fondul Anghel Saligny)

I. **Ion Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II-a) . . . . . Lei 250

Biblioteca Matematică „GEORGE ȚIȚEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime și minime geometrice* . . . . . Lei 200

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 1.000 lei anual, se plătește înainte și începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele și toată corespondența se trimite pe adresa:

Societății „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviței No. 158. — București 2.

(Telefon: 7-3803).

M. O., IMPRIMERIA NAȚIONALĂ — C. 28.500.

BIBLIOTECA „ASTRA" SIBIU

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

LICEUL „GH. LAZĂR" - SIBIU
Biblioteca Profesorilor
No. 8169

ANUL XI. No. 6 1 MARTIE 1945

9690

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 7-3808

GAZETA MATEMATICA
SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL XI. No. 6 — 1 MARTIE 1945

ABONAMENTUL LEI 300 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

DREPTE ANTIPARALELE

1°. **Definiţie.** Fie un unghiu xOy şi punctele M_1, M_2 pe latura Ox — N_1, N_2 pe latura Oy. Dacă

$$\sphericalangle OM_1N_1 = \sphericalangle OM_2N_2,$$

dreptele M_1N_1, M_2N_2 sunt *paralele*, iar triunghiurile OM_1N_1, OM_2N_2 sunt *omotetice*.

Dacă

$$\sphericalangle OM_1N_1 = \sphericalangle ON_2M_2,$$

dreptele M_1N_1, M_2N_2 sunt *antiparalele în unghiul* xOy şi triunghiul ON_2M_2 este omotetic cu $OM_1'N_1'$, simetricul triunghiului OM_1N_1 în raport cu bisectoarea unghiului xOy.

Deci două drepte sunt antiparalele într'un unghiu, când unghiul format de una din ele cu o latură a unghiului este egal cu unghiul format de a doua dreaptă cu cealaltă latură a triunghiului.

2°. **Proprietăţi.** *a)* Triunghiurile OM_1N_1, ON_2M_2 sunt asemenea, când dreptele M_1N_1, M_2N_2 sunt antiparalele.

b) Patrulaterul $M_1N_1N_2M_2$ este inscriptibil, deoarece are unghiurile opuse suplimentare.

c) Înălţimile duse din O *în triunghiurile* OM_1N_1, OM_2N_2 *sunt izogonale în unghiul* xOy, deoarece dreptele M_2N_2, $M_1'N_1'$ sunt paralele, deci înălţimea triunghiului OM_2N_2 este înălţime şi în triunghiul $OM_1'N_1'$, iar triunghiurile $OM_1'N_1'$, OM_1N_1 sunt simetrice faţă cu bisectoarea unghiului xOy.

d) Medianele duse din O *în triunghiurile* OM_1N_1, OM_2N_2 *sunt izogonale în unghiul* xOy. In adevăr, mediana dusă din O în triunghiul OM_2N_2 este mediană şi în triunghiul $OM_1'N_1'$, deci simetrică, faţă de bisectoarea unghiului xOy, a medianei dusă din O în triunghiul OM_1N_1.

3°. **Proprietăţi în triunghiu.** Fie B'C' antiparalela laturii BC a triunghiului ABC în unghiul A.

a) Diametrul cercului circumscris, trecând prin A este perpendicular pe B'C'. Proprietatea rezultă din (2°, *c*), având în vedere că izogonala înălţimii unui vârf este diametrul cercului circumscris.

b) Simediana vârfului A trece prin mijlocul segmentului B'C'. In adevăr, mediana vârfului A în triunghiul AB'C' este izogonala medianei vârfului A în triunghiul de referinţă, adică simediana vârfului.

Din această proprietate rezultă o construcţie cu rigla şi compasul a simedianei.

4°. **Laturile triunghiului ortic.** Fie A'B'C' triunghiul ortic al triunghiului ABC. Dreptele B'C', BC sunt antiparalele în unghiul A, deoarece patrulaterul BCB'C' este inscriptibil. Rezultă că laturile triunghiului ortic sunt perpendiculare pe diametrii cercului circumscris cari trec prin vârfurile triunghiului de referinţă, deci paralele cu tangentele acestui cerc în vârfurile triunghiului de referinţă.

5°. **Cercurile lui Tucker.** $B_a C_a$, $C_b A_b$, $A_c B_c$ *antiparalelele dreptelor* BC, CA, AB *ale triunghiului* ABC *în unghiurile* A, B, C. *Dacă antiparalelele sunt egale, punctele* B_a, C_a, C_b, A_b, A_c, B_c *sunt pe un cerc cu centrul pe dreapta* OK.

In adevăr, C_a şi C_b fiind pe AB, iar

$$\sphericalangle AC_a B_a = \sphericalangle C = \sphericalangle BC_b A_b,$$

patrulaterul $C_a B_a A_b C_b$ este trapez isoscel, deci inscriptibil. Să notăm A', B' mijloacele segmentelor $B_a C_a$, $A_b C_b$. Dreptele AA', BB' sunt simedianele triunghiului, deci se întâlnesc în K. Perpendicularele din A, B pe $B_a C_a$, $A_b C_b$ sunt diametrii cercului circumscris, deci se întâlnesc în O.

A'B' unind mijloacele laturilor neparalele ale trapezului $B_a C_a C_b A_b$ este paralelă cu AB, deci

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{A'K}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{B'K}}. \qquad (1)$$

Perpendiculara în A' pe $B_a C_a$ taie dreapta OK în T şi fiind paralelă cu AO, rezultă

$$\frac{\overline{OT}}{\overline{TK}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{A'K}}. \qquad (2)$$

Având în vedere (1) şi (2), perpendiculara în B' pe $C_b A_b$ trece de asemenea prin T. Dar dreptele A'T, B'T sunt diametrii în cercul $B_a C_a A_b C_b$, deci T este centrul acestui cerc.

Analog se arată că punctele A_c, B_c sunt pe acest cerc.

Cercul ce trece prin punctele A_b, A_c, B_c, B_a, $C_a C_b$ şi având centrul în T, pe OK se numeşte *cercul lui* TUCKER *). Există o infinitate de cercuri ale lui TUCKER. Centrele cercurilor lui TUCKER se află pe dreapta OK şi împart segmentul OK în acelaşi raport în care fiecare din antiparalelele egale $B_a C_a$, $C_b A_b$, $B_c A_c$ împart segmentele AK, BK, CK.

6°. **Primul cerc al lui Lemoine.** Cercul lui TUCKER având centrul în mijlocul segmentului OK se mai numeşte *primul cerc al lui* LEMOINE. In acest caz, antiparalelele egale $C_a B_a$, $C_b A_b$, $B_c A_c$ trec prin mijloacele segmentelor AK, BK, CK, iar dreptele $B_a A_b$, $B_c C_b$, $A_c C_a$, care sunt paralele cu BA, BC, AC trec prin K.

7°. **Al doilea cerc a lui Lemoine.** Cercul lui TUCKER având centrul în K se mai numeşte *al doilea cerc a lui* LEMOINE. In acest caz, antiparalelele egale $C_a B_a$, $C_b A_b$, $B_c A_c$ trec prin K.

8°. **Cercul lui Taylor.** Fie $A_1B_1C_1$ triunghiul ortic al triunghiului ABC şi B_a, C_a proiecţiile vârfului A_1 pe laturile AC, AB — A_b, A_c, B_c, B_a puncte obţinute analog. Punctele A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b sunt pe un cerc.

In adevăr, patrulaterul $AC_a A_1 B_a$ fiind inscriptibil,

$$\sphericalangle AC_a B_a = \sphericalangle AA_1B_a = \sphericalangle C,$$

deci B_a, C_a este antiparalela laturii BC în unghiul A.

Triunghiurile $AC_a B_a$, ACB sunt asemenea, raportul de asemănare fiind raportul diametrilor cercurilor circumscrise, deci

$$\frac{\overline{B_a C_a}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AA_1}}{2R}.$$

Dar $\overline{AA_1} \times \overline{BC} = 2S$, deci $\overline{B_a C_a} = \frac{S}{R}$.

Analog se arată că $A_b C_b$, $A_c B_c$ sunt antiparalelele laturilor CA, AB în unghiurile respective şi că au valoarea S : R. Rezultă

*) Cercurile astfel numite de J. NEUBERG, unul din întemeietorii *Geometriei triunghiului*, au fost descoperite de LEMOINE în 1873. TUCKER (matematician englez) s'a ocupat amănunţit de ele în 1885.

că punctele B_a, C_a, A_b, C_b, A_c, B_c sunt pe un cerc TUCKER. Acest cerc TUCKER special se numeşte *cercul lui* H. TAYLOR, după numele matematicianului englez, care l-a studiat amănunţit în anul 1884, cerc semnalat deja de CATALAN în 1879, în lucrarea sa *Théorèmes et problèmes de géométrie.*

C. IONESCU-BUJOR.

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa a VIII-a. *Exerc. 713.* Se notează A', B', C' picioarele înălţimilor, O ortocentrul. Punctul A se află pe porţiunea negativă a axei $x'x$. Se ia sensul pozitiv pe yy' astfel ca B să aibă ordonata negativă. Avem în valoare absolută,

1. $$\overline{AO} = \frac{\overline{AB'}}{\sin C} = \frac{\overline{AB}\cos A}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}\cos A =$$

$$= a\cot g A = -a\cot g (B + C)$$

(presupunând că unghiurile sunt ascuţite).

Deci A $[a\cot g (B + C), 0]$.

2. Pentru a afla coordonatele lui B,

$$\overline{A'O} = \overline{OB}\cos C = \frac{a}{\sin A}\cos B\cos C = \frac{a\cos B\cos C}{\sin (B + C)}$$

$$\overline{A'B} = \overline{AB}.\cos B = \frac{a\sin C}{\sin A}\cos B = \frac{a\sin C\cos B}{\sin (B + C)}$$

Deci

$$B\left[\frac{a\cos B\cos C}{\sin (B + C)}, -\frac{a\sin C\cos B}{\sin (B + C)}\right].$$

3. $$\overline{A'C} = \overline{AC}.\cos C = \frac{a\sin B}{\sin A}\cos C = \frac{a\sin B\cos C}{\sin (B + C)}.$$

Rezultă

$$C\left[\frac{a\cos B\cos C}{\sin (B + C)}, \frac{a\sin B\cos C}{\sin (B + C)}\right].$$

C. I. B.

Exerciţii Generale. *Exerc. 620. Dacă d_i reprezintă divizorii lui* N, *atunci:*

$$\Sigma\varphi\left(\frac{N}{d_i}\right) = N.$$

I. L.

Pentru $N = a^\alpha$ avem:

$$\Sigma\varphi\left(\frac{N}{d_i}\right) = 1 + (a-1) + a(a-1) + \ldots + a^{\alpha-1}(a-1)$$
$$= a^\alpha.$$

La fel, pentru $N = a^\alpha . b^\beta$ găsim produsul $a^\alpha . b^\beta$.
In adevăr:

$$\Sigma\varphi\left(\frac{N}{d_i}\right) = [1 + (a-1) + a(a-1) + \ldots + a^{\alpha-1}(a-1)]$$
$$\times [\varphi(1) + \varphi(b) + \varphi(b^2) + \ldots + \varphi(b^\beta)]$$
$$= a^\alpha . b^\beta.$$

Se mai poate raţiona şi astfel:

Dacă pentru $N = a^\alpha$ avem:

$$\Sigma\varphi\left(\frac{N}{d}\right) = a^\alpha,$$

atunci pentru $N = a^\alpha . b^\beta$ avem:

$$\Sigma\varphi\left(\frac{N}{d'}\right) = \Sigma\varphi\left(\frac{N}{d}\right) + \Sigma\varphi\left(\frac{N}{d} . b\right) + \ldots + \Sigma\varphi\left(\frac{N}{d} . b^\beta\right).$$

Cum ştim că, dacă A şi B au absolut aceiaşi factori, atunci:

$$\varphi(A . B) = B . \varphi(A),$$

atunci:

$$\Sigma\varphi\left(\frac{N}{d'}\right) = \Sigma\varphi\left(\frac{N}{d}\right) . [1 + \varphi(b) + \ldots + \varphi(b^\beta)]$$
$$= a^\alpha . b^\beta.$$

Şi în felul acesta raţionamentul se poate extinde la oricâţi factori.

E. G. 621. Dacă $I_x(y)$ *reprezintă numărul numerelor prime cu* y *din şirul natural al numerelor până la* x *şi dacă* $I_{a\to b}(y)$ *reprezintă numărul numerelor prime cu* y *din intervalul de numere consecutive dela* a *la* b, *atunci avem:*

$$[I_{100}(10)+I_{1000}(10)\times I_{100\to 1000}(10)=(100^2-10^2).[\varphi(10)]^2.$$

I. L.

Ştim că:

$$I_{A.N}(N)=A.\varphi(N)$$

$$I_{A.N\to B.N}(N)=(B-A).\varphi(N).$$

In cazul nostru avem:

$$A=10\ ,\quad B=100\quad \text{şi}\quad N=10.$$

Prin urmare:

$$I_{100}(10)=10.\varphi(10)\ ;\quad I_{1000}(10)=100.\varphi(10)$$

$$I_{100\to 1000}(10)=(100-10)\varphi(10).$$

Inmulţind, obţinem relaţia din enunţ.
Verificare:

$$I_{100}(10)=40\ ;\quad I_{1000}(10)=400,$$

$$I_{100\to 1000}(10)=400-40=360,$$

deci membrul I devine 440×360, iar membrul II este 9900×4^2; dar ambii sunt egali cu 158400.

E. G. 622. Dacă $\varphi_x(y)$ *reprezintă indicatorul de ordinul* x *a lui* y, *atunci avem:*

$$a^{\varphi_m(n)}-1=\mathcal{M}\varphi_{m-1}(n)$$

a *fiind nedivizibil cu* $\varphi_{m-1}(n)$.

I. L.

In adevăr, după teorema lui FERMAT, generalizată de EULER, avem:

$$a^{\varphi(n)}-1=\mathcal{M}n$$

ori vedem că:

$$\varphi_m(n)=\varphi_{m-1}=(n).$$

Până la 1 Februarie 1945 s'au primit soluții bune dela:

Liceul „N. Bălcescu", Brăila.

Clasa a VII-a: Bărbulescu C. V. (VII: 808, 9), Brezeanu G. F. (VII: 809, 12, 3, 4, 5, 6), Coşovliu I. O. (VII: 810, 2, 3, 5), Gheţu G. E. (VII: 809, 10, 2, 3, 4), Mateescu P. G. (VII: 809, 10, 2, 3), Novac I. I. (VII: 809, 10, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 20, 1, 3, 4, 5, 6), Roşca N. G. (VII: 809, 10, 2, 3, 4, 7, 9, 20, 1), Serafimov P. P. (VII: 809, 2, 3).

Liceul „Cantemir Vodă", Bucureşti.

Clasa a VI-a: Chiriţă I. I. (VI: 863, 73, 7, VII: 808, 12, 3).

Clasa a VIII-a: Diaconescu G. (VIII: 718, 25, 8, 9), Niculescu D. (VIII: 718).

Liceul de Construcţii Civile şi Edilitare, Bucureşti.

Clasa a III-a: Marinescu I. P. (III: 264, 5, 6, 7, 8, 9).

Liceul „Sf. Iosif" Bucureşti.

Clasa a VIII-a: Mihăilescu C. E. (VIII: 709).

Liceul „Gheorghe Lazăr", Bucureşti.

Clasa a VI-a: Chirilă A. R. (VI: 866).

Liceul „Titu Maiorescu", Bucureşti.

Clasa a IV-a: Avramescu C. C. (IV: 719), Biluseac G. C. (IV: 715, 6, 7, 9, 21, 2, V: 846, 8), Boşca N. D. (IV: 716, 7, 9), Chirilă G. C. (IV: 715, 7, 9), Mărgescu D. P. (IV: 716), Pomponiu G. G. (IV: 711, 5, 9, 22), Rasidescu Ş. (IV: 717, 9), Tomasian A. C. (IV: 711, 5), Tzucatos M. C. (IV: 715, 9).

Clasa a VI-a: Cârcoană N. A. (VI: 860), Cojocaru A. (VI: 861, 70, VII: 833), Doneaud E. A. (VI: 860, 1, 2), Haret S. R. (VI: 870), Seni D. (VI: 871), Stoica M. (VI: 861).

Clasa a VIII-a: Cantuniar I. C. (VIII: 717, 9, 20), Corbaru V. (VIII: 732).

Liceul „Matei Basarab", Bucureşti.

Clasa a VI-a: Morărescu A. I. (VI: 860, 6).

Clasa a VIII-a: Ieşan A. (VIII: 717, 8, 9, 20, 1, 2, 3, 5, 6), Ispas I. C. (VIII: 725, 7), Muntz M. E. (VIII: 718, 9, 33, 8).

Liceul „Mihai Viteazul", Bucureşti.

Clasa a IV-a: Alexandrescu P. (IV: 708), Bottez S. (IV: 708), Culger G. M. (IV: 708), Dobrescu S. V. (IV: 708), Ghiţă N. N. (IV: 708), Georgescu G. (IV: 708), Nicolescu H. (IV: 708), Popa M. (IV: 708).

Clasa a VII-a: Popa M. V. (VII: 809, 12, 3, 7).

Liceul de fete „Regina Maria", Bucureşti.

Clasa a VI-a: Iacobescu St. (VI: 860), Ioan A. A. (VI: 860, 6).

Colegiul Naţional „Sf. Sava", Bucureşti.

Clasa a IV-a: Zamfirescu I. M. (711, 4).

Clasa a V-a: Stavrică M. (V: 850, 1, 5, 6, 60).

Clasa a VI-a: Manoliu V. (VI: 860, 1, 2, 3, 6).

Clasa a VII-a: Creţu G. G. (VII: 812), Roman N. V. (VII: 810, 2, 5, 6), Săvescu A. M. (VII: 809, 17, 27).

Clasa a VIII-a: Alexandru M. (E. G.: 650), Niculescu V. D. (VIII: 718, 9, 20, 5, 6, 7, 8, 9), Soare V. M. (VIII: 717, 8, 9, 20, 6, 8, 9, 32, 3, 8).

Liceul „Aurel Vlaicu", Bucureşti.

Clasa a V-a: Pârvu T. C. (V: 852).

Clasa a VII-a: Barbaini A. M. (VII: 809, 12, 3, VIII; 717), Leon A. M. (VII: 808, 9).

Clasa a VIII-a: Dumitrescu S. V. (VIII: 709, 10, 1, 2, 5, 27).

Şcoala Centrală de fete, Bucureşti.

Clasa a VI-a: Dumitrescu S. M. (VI: 860, VII: 809, 12, 3), Dumitrescu A. (VI: 866, VIII: 732).

Clasa a VII-a: Andreian I. (VII: 813, 5, 6, 23, 4, 6, 7, VIII: 726, 8, 32, 7), Ilutza P. M. (VII: 826).

Clasa a VIII-a: Boldescu V. (VIII: 724, 5, 7), Popescu D. L. (VIII: 724, 5, 7), Simionescu I. L. (VII: 724, 5, 7), Vâlsănescu G. T. (VII: 725, 7), Vasilescu M. (VIII: 709, 12, 25, 6, 7, 38).

Liceul Internat, Buftea.

Clasa a IV-a: Tănăsescu C. M. (IV: 715, V: 850, 1, 2).

Liceul „D. B. Ştirbey", Câmpina.

Clasa a VIII-a: Macavei A. E. (VIII: 717, 9, 20), Petre G. F. (VIII: 719, 20).

Colegiul Naţional „Carol I", Craiova.

Clasa a VI-a: Dumitrescu A. P. (VI: 860, 1).

Clasa a VII-a: Braşoveanu D. G. (VIII: 809, 13, 5, 6, 23, 4, 7, VIII: 727, 32), Puţureanu M. I. (VII: 822, 3, 4, 6).

Liceul de fete „Elena Cuza", Craiova.

Clasa a V-a: Georgescu G. (V: 845, 6, 50, 1, 2).

Clasa a VI-a: Ceauşu M. M. (VI: 873.

Clasa a VII-a: Grămescu R. A. (VII: 817, 21), Jienescu I. M. (VII: 817, 21).

Colegiul Național „N. Filipescu", Predeal.

Clasa a V-a: Diaconu G. V. (V: 846, 8), Munteanu I. I. (V: 845, 6, 8), Stoian D. (V: 846, 8).

Liceul „Tudor Vladimirescu", Târgu-Jiu.

Clasa a VI-a: Popescu I. E. (VI: 860, 6), Țiclete P. V. (VII: 866).

Liceul „Traian" Turnu-Severin.

Clasa a VIII-a: Pătășanu D. V. (VIII: 732, 3).

Elevi particulari.

Clasa a VI-a: Drăghicescu E. (VI: 860, 6).
Clasa a VIII-a: Bărbulescu C. V. (VII: 814).

EXERCIȚII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Iunie 1945

Clasa a III-a. *Exerc. 279.* Să se construiască un triunghiu ABC, cunoscându-i latura $\overline{BC} = 7{,}8$ cm și înălțimile $\overline{BB'} = 7{,}2$ cm, $\overline{CC'} = 6{,}6$ cm, corespunzătoare celorlalte două laturi.

Să se calculeze:

a) proiecțiile segmentelor $\overline{BC'}$ și $\overline{CB'}$ pe latura BC;

b) proiecția segmentului $\overline{B'C'}$ pe latura BC;

c) lungimea segmentului $\overline{B'C'}$.

d) lungimile segmentelor $\overline{BH}$, $\overline{HB'}$, $\overline{CH}$, $\overline{HC'}$ ale celor două înălțimi BB', CC', H fiind intersecția lor.

O. N. Ț.

III. 280. Să se reconstruiască trapezul ABCD, știind că diagonalele lui AIC și DIB sunt perpendiculare una pe alta și că sunt cunoscute segmentele $\overline{AI} = 7$, $\overline{BI} = 8$, $\overline{CI} = 9$. Fie L punctul unde cercurile AIB și DIC se taie a doua oară.

Să se calculeze:

a) lungimea coardei comune $\overline{IL}$;

b) aria trapezului ABCD.

O. N. Ț.

III. 281. Fie cercul (O) cu diametrul $\overline{AOB}$ și cercul (I) cu diametrul $\overline{OIB}$. Dreptele AE și AE', tangente duse din A la cercul (I) în D și D', taie cercul (O) în E și E', iar coarda de contact $\overline{DD'}$ prelungită taie cercul (O) în F și F'.

Raza cercului (I) fiind r, să se calculeze:

a) lungimea coardei de contact $\overline{DD'}$;

b) lungimea coardelor $\overline{AE} = \overline{AE'}$;

c) lungimea coardei $\overline{EE'}$ și distanța ei la punctul A;

d) lungimea coardei $\overline{FF'}$.

Aplicație pentru $r = \sqrt{2}$ (latura patratului în cercul de rază egală cu unitatea).

O. N. Ț.

Clasa a IV-a. *Exerc. 727.* Să se rezolve ecuația

$$\frac{2x+7}{15} - \frac{7x+2}{12} = \frac{18-7x}{10} - \frac{22+5x}{6}$$

și să se verifice soluția aflată.

O. N. Ț.

IV. 728. Să se rezolve ecuația

$$\frac{15}{2x-3} - \frac{12}{2x+3} = \frac{4x+99}{4x^2-9}$$

și să se verifice soluția aflată.

O. N. Ț.

IV. 729. Să se rezolve ecuația

$$\frac{11x+9}{12x+14} - \frac{13x-9}{12x-14} = \frac{-6x^2+40x-28}{36x^2-49}$$

și să se verifice soluția aflată.

O. N. Ț.

IV. 730. Fie o prismă dreaptă ABCDEFGH cu baza un patrat ABCD. Să se arate, că diagonala AH a prizmei este perpendiculară pe diagonala BD a patratului de bază.

O. N. Ț.

Clasa a V-a. *Exerc. 865.* Să se rezolve ecuația

$$(a+b)^2 x^2 - (a+b)^3 x + 2ab\,(a^2+b^2) = 0$$

să se verifice rădăcinile aflate.

I. I. S.

V. 866. Să se rezolve ecuația

$$\frac{a^2}{b^2}(x-a)^2+\frac{b}{a}(x-b)\,x-\frac{b^2}{a^2}(x-b)^2-\frac{a}{b}(x-a)\,x=0$$

și să se verifice rădăcinile aflate.

I. I. S.

V. 867. In cercul (O) este înscris exagonul regulat ABCDEF. Pe fiecare latură se construește înafară un triunghiu echilateral: AA'B, BB'C, CC'D, DD'E, EE'F, FF'A. Fie A'', B'', C'', D'', E'', F'' intersecțiile perechilor de drepte

(A'D, B'E); (B'E, C'F); (C'F, D'A); (D'A, E'B); (E'B, F'C); (F'C, A'D).

a) Să se arate, că poligonul A'' B'' C'' D'' E'' F'' este un exagon regulat și să se calculeze $\overline{A''B''}$.

b) Grupele de trei drepte, (AD, CE, C'F) și analoagele, sunt grupe de drepte concurente în același punct.

O. N. Ț.

V. 868. Să consideră în plan două cercuri (O) și (I) de raze R și r ($R<r$). Se dă o translație cercului (I) cu direcția de translație IO. La ce distanță trebue să fie aduse centrele O și I, pentru ca lungimea coardei comune a celor două cercuri în acea poziție să fie egală cu distanța centrelor?

O. N. Ț.

V. 869. Să se discute ecuația

$$(m-1)\,(m-2)\,x^2-2\,(m-2)\,(m-3)\,x+(m-3)\,(m-4)=0,$$

parametrul m variind dela $-\infty$ la $+\infty$.

I. I. S.

V. 870. Fie $\overline{AB}$ și $\overline{MN}$ două coarde perpendiculare într'un cerc de centru O. Se se găsească poziția coardei $\overline{MN}$ când $\overline{AB}$ este dată, așa încât AM, BN să fie perpendiculare una pe alta.

Gh. B.

V. 871. Fie A' piciorul bisectoarei interioare a unghiului A a triunghiului ABC înscris în cercul de centru O.

Să se calculeze $\overline{PA'}$ în funcție de laturile triunghiului știind că P este intersecția razei OA cu perpendiculara în A' pe BC.

Gh. B.

V. 872. Se dă triunghiul ABC înscris în cercul de centru O. Fie A' diametralul opus lui A și D mijlocul arcului AA'C.

Se construește în O și în sensul pozitiv unghiul XOA egal cu $\frac{2}{3}$ din unghiul DOA'. Să se arate, că

$$\sphericalangle XOA + \sphericalangle XOB + \sphericalangle XOC = 2\pi.$$

GH. B.

Clasa a VI-a. *Exerc. 884.* Intr'un triunghiu ABC se dă $tgA = 5$ și $tgB\ tgC = 2$. Să se afle cele trei triunghiuri ale triunghiului.

I. I. S.

VI. 885. Intr'un triunghiu dreptunghiu are loc relația

$$b(a-b)(a^2\cos C - b^2) - c(a-c)(a^2\cos B - c^2) = \\ = a(b+c-a)(a^2\cos C - a^2\cos B + c^2 - b^2).$$

I. I. S.

VI. 886. Să se arate că într'un triunghiu oarecare avem relația

$$4p^2 \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{3} = a(b+c)\left(\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right).$$

I. I. S.

VI. 887. Intr'un triunghiu ABC fie $\overline{BD}$ înălțimea vârfului B. Se consideră $2 \sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC$ și că $A = \frac{540^0}{7}$.

Să se calculeze unghiurile triunghiului ABC, precum și suprafața lui.

I. I. S.

VI. 888. Se dă o piramidă patrulateră SABCD cu baza un trapez dreptunghiu ABCD. Știind că baza mare a trapezului $\overline{DC} = a$, că înălțimea lui $\overline{AD} = 2R$, că a doua latură a trapezului este egală cu suma bazelor lui și că înălțimea piramidei $\overline{SC} = h$, să se calculeze:

a) suprafața totală și volumul piramidei date

b) lungimile muchiilor laterale.

O. N. Ț.

VI. 889. Se dă o piramidă SABCD cu baza ABCD un trapez isoscel cu bazele $\overline{AD} = a$, $\overline{BC} = b$ şi înălţimea $\overline{BE} = i$, vârful S al piramidei proiectându-se în O punctul de întâlnire al diagonalelor AC, BD, ale bazei.

Fie B', C' proiecţiile vârfurilor B, C pe faţa SAD, iar H şi G intersecţiile dreptei B' C' cu SA şi SD. Paralela dusă din H la AB taie în I pe SB, iar paralela dusă din G la DC taie în L pe SC. Ştiind că $\overline{SO} = h$, să se calculeze raportul ariilor şi al volumelor piramidelor SABCD şi SHILG.

O. N. Ţ.

Clasa a VII-a. *Exerc. 836.* Să se reprezinte grafic variaţia funcţiei

$$y = \frac{x^2 - 2\,(m-1)\,x + 3 - m}{(x-1)^2}$$

deosebindu-se diferite valori remarcabile.

I. I. S.

VII. 837. Să se reprezinte grafic variaţia funcţiei

$$y = \pm \sqrt{\frac{x\,(1-2x)}{1-x^2}}.$$

I. I. S.

VII. 838. Să se construiască curba

$$y = \frac{x}{a+x}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

GH. B.

VII. 839. Să se arate, că, oricare ar fi numerele reale a, b, determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} bc - a^2 & ac - b^2 & ab - c^2 \\ ac - b^2 & ab - c^2 & bc - a^2 \\ ab - c^2 & bc - a^2 & ac - b^2 \end{vmatrix}$$

este totdeauna pozitiv.

O. N. Ţ.

VII. 840. Să se determine condiţiile pentru ca sistemul

$$(a^4 - 2ab^3)\,x + 3a^2 b^2\,y + (b^4 - 2a^3 b)\,z = 0$$
$$(b^4 - 2a^3 b)\,x + (a^4 - 2ab^3)\,y + 3a^2 b^2\,z = 0$$
$$3a^2 b^2\,x + (b^4 - 2a^3 b)\,y + (a^4 - 2ab^3)\,z = 0$$

să aibă soluţii nu toate nule.

O. N. Ţ.

VII. 841. Să se rezolve sistemul

$$x \sin\alpha + y \sin\beta + z \sin\gamma = p$$
$$x \sin\beta + y \sin\gamma + z \sin\alpha = q$$
$$x \sin\gamma + y \sin\alpha + z \sin\beta = r$$

unde $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Discuţie.

O. N. Ţ.

VII. 842. Să se discute sistemul

$$x - y + z = p$$
$$x \operatorname{tg}\alpha - y \operatorname{tg}\beta + z \operatorname{tg}\gamma = q$$
$$x \operatorname{tg}^2\alpha - y \operatorname{tg}^2\beta + z \operatorname{tg}^2\gamma = r$$

şi să se rezolve în cazul compatibilităţii.

O. N. Ţ.

VII. 843. Să se arate, că, dacă α, β, γ sunt trei unghiuri distincte, sistemul de ecuaţii

$$x + y + z = p$$
$$x \operatorname{tg}\alpha + y \operatorname{tg}\beta + z \operatorname{tg}\gamma = q$$
$$x \operatorname{cotg}\alpha + y \operatorname{cotg}\beta + z \operatorname{cotg}\gamma = r$$

este compatibil. Să se rezolve apoi sistemul.

O. N. Ţ.

Clasa a VIII-a. *Exerc. 747.* Să se găsească ecuaţia iperbolei, raportată la axele sale, care e tangentă dreptei $3x - 2y - 8 = 0$ în punctul (6,5).

G. D. S.

VIII. 748. Să se afle ecuaţia iperbolei raportată la axele sale, care este tangentă dreptelor

$$7x - 5y - 25 = 0 \quad \text{şi} \quad 8x - 5\sqrt{2}\,y - 20 = 0.$$

G. D. S.

VIII. 749. Să se găsească ecuaţia unei iperbole raportată la axele sale, ştiind că distanţa focală este $\overline{FF'} = 10$ şi că e tangentă dreptei

$$5x - 4y - 16 = 0.$$

G. D. S.

VIII. 750. Se dă iperbola

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} - 1 = 0$$

şi se cere să se afle ecuaţiile normalelor paralele cu dreapta

$$20x + 39y - 65 = 0.$$

G. D. S.

VIII. 751. Să se afle punctul de pe iperbola raportată la axele ei, astfel ca normala în acest punct să facă un unghiu de 45^0 cu asimptota $y = \frac{b}{a}x$.

G. D. S.

VIII. 752. Luând ca axe de coordonate latura A_1A_2 a unui decagon regulat şi perpendiculara pe mijlocul lui A_1A_2, să se scrie ecuaţiile celorlalte laturi.

GH. B.

VIII. 753. Să se determine α şi să rezolve ecuaţia

$$x^3 + \alpha x^2 + 11x + \alpha = 0,$$

ştiind că între rădăcinile ei există relaţia

$$x_1 + x_3 = x_2^2.$$

I. I. S.

VIII. 754. Să se determine a şi b astfel ca ecuaţia

$$2x^4 + ax^3 + 50x^2 + b + 18 = 0$$

să admită două rădăcini inverse şi una dublă. Să se rezolve ecuaţia.

I. I. S.

Exerciţii Generale. *Exerc. 690.* Sunt numere, pentru care diferenţa patratelor lor este egală cu diferenţa indicatorilor lor, de o singură cifră?

I. L.

E. G. 691. Sunt numere de o singură cifră, pentru care diferenţa patratelor lor este egală cu diferenţa indicatorilor acelor patrate?

I. L.

E. G. 692. Sunt numere, de o singură cifră, pentru care diferenţa lor este egală cu diferenţa indicatorilor lor?

I. L.

E. G. 693. Sunt numere, de o singură cifră, pentru care diferenţa lor este egală cu diferenţa indicatorilor patratelor lor?

I. L.

E. G. 694. Sunt numere, de o singură cifră, pentru care diferenţa patratelor lor este egală cu diferenţa patratelor indicatorilor lor?

I. L.

E. G. 695. Să se determine cele mai mici numere întregi care satisfac ecuaţia

$$x^2 - 10y^2 = 1.$$

I. L.

E. G. 696. Să se examineze, dacă sistemul de ecuaţii

$$x^2 - y^2 = 2u^2 \quad ; \quad x^2 + y^2 = 2v^2$$

are soluţii în numere întregi.

I. L.

E. G. 697. Să se examineze, dacă ecuaţia

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = t^2$$

are soluţii în numere întregi.

I. L.

E. G. 698. Să se arate, că ecuaţia

$$x^2 + 2xy = 11y^2 + 1$$

are soluţii în numere întregi.

I. L.

INSTRUCȚIUNI

Pentru redactarea și trimiterea soluțiunilor exercițiilor publicate în *Gazeta Matematică Supliment cu exerciții* se vor avea în vedere *Instrucțiunile* publicate în numerele 1, 2 și 3 pe copertă.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII și VIII, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității rezolvând și probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca Societății „Gazeta Matematică" au apărut și se găsesc următoarele:

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a științifică,* Ediția VIII-a . . . . . Lei 1.000

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 100

X. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . . . Lei 1.200

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 500 / pentru abonații G. M. și S. G. M. . . . Lei 300

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 900

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica rațională . . . . . Lei 1.500

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediția II-a revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 700

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediția IV-a revăzută și mărită . . . . . Lei 1.000

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediția II-a revăzută și adăogită de **Gabriela Țițeica** . . . . . Lei 1.000

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a (Trigonometrie sferică). Revăzută și adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 400

XX. **I. I. Chițulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 600

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană și sferică cu aplicații la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . Lei 1.500

XXII. **G. Țițeica,** *Culegere de Probleme de analitică.* Ediția II. Partea II adăogită de **N. G. Botea** și **C. Ionescu-Bujor** . . . . . Lei 900

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 600

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile VII—IX de Aritmetică și Cartea X a Iraționalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 700

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile XI—XIII de Geometrie în spațiu: Cartea XIV a lui HYPSICLE și Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 500

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"
(Tipărită din fondul Anghel Saligny)

I. **Ion Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II-a) . . . . . Lei 600

Biblioteca Matematică „GEORGE ȚIȚEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime și minime geometrice* . . . . . Lei 600

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 1.000 lei anual, se plătește înainte și începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele și toată corespondența se trimite pe adresa:

Societății „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviței No. 158. — București 2.

(Telefon: 7-3803).

M. O., IMPRIMERIA NAȚIONALĂ — C. 30.033.

8749

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL XI. No. 7 1 APRILIE 1945

LICEUL „GH. LAZĂR" - SIBIU
Biblioteca Profesorilor
No. .....

9690

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 7-3809

GAZETA MATEMATICA
SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL XI. No. 7 — 1 APRILIE 1945

ABONAMENTUL LEI 300 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

CONCURSUL „GAZETA MATEMATICĂ“ DIN 1945

La Concursul revistei *Gazeta Matematică* din acest an au fost admişi a lua parte următorii candidaţi:

Clasa a IV-a: *Biluseac G. Claudiu.*

Clasa a V-a: *Diaconu Gh. Vasile, Munteanu T. Ioan şi Roşu V. Constantin.*

Clasa a VI-a: *Badea I. Mihai, Constantin N. Vladimir, Doneaud E. André, Dumitrescu Sorin, Haret Sp. Radu, Orha Ion, Panait Ionel, Progreseanu A. Alexandru, Rădulescu E. Dan şi Seni A. Dinu.*

Clasa a VII-a: *Braşoveanu D. Gheorghe, Constantinescu R. Mihai, Leon A. Mihai, Popovici Horaţiu, Sălcuţeanu Gheorghe, Teodorescu Al. Alexandru, Tripşa Iosif şi Vrânceanu Gh. Gheorghe.*

Clasa a VIII-a: *Barbu A Ioan, Cantuniar I. Cristu, Cârstea D. Marin, Columbeanu D. Petre, Goldiş I. Gheorghe, Grigore A. Gheorghe, Ieşan Alexandru, Leţia L. Valentin, Marinescu C. Marinel, Mustăcescu V. Traian, Pavica Victor, Piţigoi Gh. Victor şi Popescu I. Barbu.*

Fiecare candidat va da câte o lucrare scrisă din ambele materii la care s'a înscris.

Lucrările scrise sunt eliminatorii.

Prima lucrare scrisă se va da Joi 10 Mai 1945 dela ora 8^{30} până la ora 11^{30}, iar a doua lucrare scrisă în aceeaşi zi dela ora 15 la ora 18 la *Politechnică, Calea Griviţei 132, Bucureşti.*

Oralul va începe Vineri 11 Mai 1945 tot la *Politechnică.*

Candidaţilor cari nu dispun de mijloace pentru venirea la Bucureşti li se vor trimite din timp mijloacele necesare de transport, dacă vom dispune de ele.

Eventualele schimbări vor fi comunicate la timp.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

EXERCIȚII REZOLVATE

Clasa a VII-a. *Exerc. 813. Un termen al desvoltării* $(x+3)^n$ *are coeficientul 110.565 și coeficientul binominal 1365. Să se afle* n *și rangul termenului.*

N. M.

Avem:

$C_n^p \cdot 3^p = 110.565$ și $C_n^p = 1365$ deci $3^p = 81$, $p = 4$.

Apoi:

$C_n^4 = 1365$ sau $n(n-1)(n-2)(n-3)$

$= (n^2 - 3n)(n^2 - 3n + 2) = 32.760.$

Notăm $n^2 - 3n = y$. Aflăm $y = 180$ sau -182 și singura valoare întreagă pentru n este 15.

VII. 814. Să se rezolve ecuația $11\, C_x^{22} = 100\, C_{x-2}^{21}$ (enunț corectat).

N. M.

Avem succesiv:

$$11 \cdot \frac{x!}{22!\,(x-22)!} = 100 \frac{(x-2)!}{21!\,(x-23)!} \therefore 11 \frac{x(x-1)}{22(x-2)} = 100$$

de unde $x_1 = 25$, $x_2 = 176$. Ambele soluții bune.

Clasa a VIII-a. *Exerc. 721. Fie* A, B, C, D *patru puncte pe o dreaptă și* O *un punct arbitrar al dreptei. Fie* $\overline{OG}$ *media ponderată a segmentelor* $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ *de ponderi* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. *Fie încă* M_1, M_2, M_3 *punctele dreptei pentru care*

$$\alpha\overline{MA}^3 + \beta\overline{MB}^3 + \gamma\overline{MC}^3 + \delta\overline{MD}^3 = 0$$

și I *centrul de greutate al punctelor* M_1, M_2, M_3 I *coincide cu* G (enunț corectat).

N. M.

Fie x abscisa lui M, iar a, b, c, d abscisele punctelor A, B, C, D raportate la originea O; $\Sigma\alpha(x-a)^3 = 0$. Ţinem seamă de relaţiile dintre rădăcini şi coeficienţi:

$$\overline{OI} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) = \Sigma a\alpha : \Sigma\alpha = \overline{OG}.$$

Exerciţiul admite uşoare generalizări.

Până la 1 Martie 1945 s'au primit soluţii bune dela:

Liceul „Samuil Vulcan", Beiuş-Bihor.

Clasa a V-a: Popa M. N. (V: 850, 2, 5, 6, E. G.: 670).

Liceul „N. Bălcescu", Brăila.

Clasa a V-a: Perianu S. G. (V: 850, 5).

Clasa a VII-a: Coşovliu I. O. (VII: 818, 23, 7), Gheţu G. E. (VII: 816, 7, 21, E. G.: 652, 3, 4, 6, 8, 9), Ionescu C. G. (VII: 815), Ionescu C. T. (VII: 817, 20), Novac I. I. (VII: 815, 6, 22, 7, VIII: 727, E. G.: 652, 3, 4, 6, 8, 9, 61), Nicoară G. T. (VII: 817, 8, 20, 1), Roşca N. G. (VIII: 815, 6), Serafimov P. (E. G.: 652, 6).

Clasa a VIII-a: Beşchea I. R. (VIII: 725, 6, 7, 8, 9).

Liceul „Cantemir Vodă", Bucureşti.

Clasa a IV-a: Nicolescu P. (IV: 715, 6, 7, 20).

Clasa a V-a: Chiriţă I. I. (V: 868, 76, VII: 827, 9).

Clasa a VIII-a: Diaconescu G. (VIII: 710), Nicolescu D. (VIII: 725), Ţifescu G. R. (VIII: 725, 6, 9).

Liceul „Cultura", Nr. 3.

Clasa a V-a: Juster M. N. (V: 850, 5), Löbel A. I. (V: 850), Steinberg D. M. (V: 850, 2).

Liceul „Titu Maiorescu", Bucureşti.

Clasa a III-a: Dumitrescu S. M. (III: 273).

Clasa a IV-a: Biluseac C. (IV: 712, 3, 25, V: 850, 1, 2, E. G: 652, 3, 4, 5, 62), Boşca N. D. (IV: 725, V: 850, 5), Chirilă G. C. (IV: 712, 3, 6), Ghilescu G. (IV: 712, 3), Giurcăneanu C. G. (IV: 715, 6, 9), Grigorescu A. C. (IV: 715), Măneasă V. (IV: 725), Mărgescu D. P. (IV: 712, 3, 9, 25),

Mihăilescu V. V. (IV: 716), Poenaru P. (IV: 712, 6, 7), Pomponiu G. G. (IV: 721, 5, VII: 833), Tomasiu C. (IV: 712, 3), Tzucatos C. (IV: 712, 3).

Clasa a VI-a: Cojocaru I. A. (VI: 865, 73), Doneaud A. (VI: 865, 73, 6, E. G.: 652, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 60, 1, 2, 7), Haret S. R. (VI: 864, 5, 71, 7, E. G.: 654, 5, 6, 7, 8, 9, 60, 1, 2), Lahovary N. V. (VI: 873), Nicolescu P. T. (VI: 877), Seni D. (E. G.: 652, 3, 5, 6, 62, 73).

Clasa a VIII-a: Cantuniar C. (VIII: 723, 4, 5, 6, 8, 9, E. G.: 653, 5), Dumitriu-Tătăranu I. (VIII: 725, 36, 44), Mateescu G. A. (VIII: 723, 4, 5, 6, 9, 42), Mustăcescu V. T. (VIII: 723, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 30, E. G.: 652, 3, 4, 5), Radu G. I. (VIII: 724, 5, 6, 8), Ulieru C. M. VIII: 723, 6).

Liceul „Matei Basarab", Bucureşti.

Clasa a VI-a: Morărescu I. (E. G.: 653).

Clasa a VIII-a: Christodor V. V. (VIII: 723, 4, 5, 6, 7, 8, 9), Dorobanţu D. S. (VIII: 725, 8), Ieşan A. (VIII: 728, 9, 30, 3, E. G.: 654, 6, 8, 9, 60, 1, 2), Ispas C. (VIII: 719, 20, 4, 6, 8, 9, 32, E. G.: 652, 4, 6, 8, 9, 60, 7), Muntz M. E. (VIII: 724, 5, 6, 8, 9, 31, E. G.: 656, 8).

Liceul „Mihai Viteazul", Bucureşti.

Clasa a IV-a: Alexandrescu T. P. (IV: 712), Ghiţă N. N. (IV: 712).

Clasa a V-a: Iosifescu G. (V: 849, 55, 6, 62, VII: 834, E. G.: 655, 68, 9), Pantea N. V. (V: 851, 2, 5, 6).

Clasa a VII-a: Dumitrescu F. M. (VII: 817, 20, 1, E. G.: 652, 3, 4, 5, 7, 61), Popa M. (E. G.: 659, 60, 7).

Clasa a VIII-a: Hotti Gh. (VIII: 725, 6, 8, 9).

Institutul „Notre Dame de Sion", Bucureşti.

Clasa a V-a: Badea I. V. (V: 855, 6), Gorgos A. N. (V: 855).

Liceul Ortodox „Zoe Romniceanu", Bucureşti.

Clasa a IV-a: Luchian C. (IV: 715, 6).

Gimnaziul „I. Eliade Rădulescu", Bucureşti.

Clasa a IV-a: Nestorescu D. M. (IV: 716, 7).

Liceul de fete „Regina Maria", Bucureşti.

Clasa a VI-a: Iacobescu St. (E. G.: 652, 64), Ioan A. A. (E. G.: 652, 3, 62).

Liceul „Sf. Andrei", Bucureşti.

Clasa a VII-a: Chiraleu S. I. (VII: 826, 9, VIII: 732).

Liceul „Sf. Iosif" Bucureşti.

Clasa a VIII-a: Costinescu F. H. (VIII: 725), Mihăilescu E. (VIII: 725), Olteanu I. D. (VIII: 725).

Institutul „Sf. Maria", Bucureşti.

Clasa a VI-a: Prassa G. A. (VI: 870, 1, 3, 4).

Colegiul Naţional „Sf. Sava", Bucureşti.

Clasa a IV-a: Zamfirescu I. M. (IV: 712, 3, 5, 6, 7).
Clasa a V-a: Negoescu B. G. (V: 852, 5).
Clasa a VII-a: Cornea T. T. (VII: 808, 27, 9, 33, VIII: 732), Moraite G. A. (VII: 826, 7, 9, 31, 3, 4, 5), Săvescu A. M. (VII: 816, 7, 8, 21, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 703, 4, 5, VIII: 732, 33, E. G.: 662).
Clasa a VIII-a: Giurescu T. R. VIII: 724, 5, 6, 8, 9), Mihail A. (VIII: 723, 4, 5, 6, 8, 9, 30, E. G. 654, 5, 6, 9), Niculescu V. D. (VIII: 730, E. G.: 652), Pop T. M. (VIII: 717, 8, 9, 20), Ralu G. I. (VIII: 728, 9), Soare V. M. (VIII: 731, 4, 7, 42, 4, E. G.: 657, 60, 2, 5, 6, 73, 4, 5, 80, 1).

Liceul „Aurel Vlaicu", Bucureşti.

Clasa a IV-a: Nicolae D. C. (IV: 714, 5, 6, 7).
Clasa a V-a: Pârvu T. C. (V: 850, E. G.: 662).
Clasa a VII-a: Barbaiani A. M. (E. G.: 653, 4, 6, 7, 8, 9, 60, 1).
Clasa a VIII-a: Dumitrescu V. (VIII: 723, 5, 6, 8, 9).

Şcoala Centrală de fete, Bucureşti.

Clasa a IV-a: Dumitrescu Popovici I. (IV: 716, 7), Gheorghiu C. (IV: 716, 7).
Clasa a VI-a: Dumitrescu I. A. (E. G.: 662).
Clasa a VII-a: Andreian I. C. (VII: 808, 17, 9, 20, 2, 9, 30, 1, 4, 5, VIII: 724, 5, 9, 43), Halunga O. C. (VII: 827, 9, 33, 4, 5), Miriam, P. I. (VII: 827, 9, 30, 5).
Clasa a VIII-a: Nedelcu V. (VIII: 724, 5, 7).

Particulari-Bucureşti.

Clasa a VI-a: Drăghicescu A. E. (E. G.: 662).

Liceul „Ştirbei-Vodă", Călăraşi.

Clasa a VII-a: Constantinescu D. P. (VII: 815, 6).
Clasa a VIII-a: Giulea V. M. (VIII: 723).

Liceul „Iulia Hasdeu", Câmpina.

Clasa a V-a: Bellorie N. M. (V: 850, 5).

Liceul „D. B. Ştirbey", Câmpina.

Clasa a VIII-a: ARGHIRIADE E. G. (VIII: 725, 8, 9), FILIP G. P. (VIII: 723, 5, 6, 7, 8, 9), MACAVEI A. E. (VIII: 723, 5, 6, 7, 8, 9).

Liceul de fete Câmpulung, Muscel.

Clasa a VII-a: ALBU A. S. (VII: 829, 34).

Liceul Militar „Ştefan cel Mare", Câmpulung, Muscel.

Clasa a IV-a: ALEXANDRESCU N. A. (IV: 716, 7), BAHRIM V. L. (IV: 716, 20, 1), BUZEA S. I. (IV: 716, 7), CURELEANU I. V. (IV: 716, 7, V: 852), DIDILESCU V. T. (IV: 716, 7), IORGA N. R. (IV: 716), OPREA C. L. (IV: 716), VASILIU N. (IV: 716, 9, 20, 1, 2), ZAMOSTEA G. V. (IV: 715, 7, V: 852).

Clasa a V-a: CORDUNEANU C. (V: 848, 50, 1, 5), DRĂGHICESCU P. C. (V: 848, 50, 1, 3, 5), FILIP V. I. (V: 848), TOMA G. O. (V: 848), TOFAN C. A. (E. G.: 643, 4, 6, 7, 8, 8, 50, 1).

Clasa a VI-a: MUNTEANU I. D. (VI: 866), PARAMON G. V. (VI: 866), PARASCHIVESCU C. M. (VI: 866), VLAD M. (VI: 866).

Clasa a VII-a: CIUMAŞU V. (E. G.: 648, 7, 8, 9), CIUREANU G. C. M. (VII: 803, 27), DIMITRIU S. N. (VII: 827), NACHE D. D. (VII: 803, 26, 7, VIII: 727, 33. E. G.: 646, 7, 8, 9), PALOŞANU N. (VII: 827), ŞERBAN C. N. (VII: 804, 15, 6, 7, 21, 6, 7, E. G.: 643, 4, 6, 7, 8, 9).

Clasa a VIII-a: IGNAT G. M. (VIII: 724, 5, 6, 7), IOAN E. (VIII: 732), MINCULESCU A. (VIII: 711, 2, 8, 24, 5, 6, 7, 32, 3, E. G.: 646, 7, 8, 9, 50, 1, 65, 6), POPESCU I. (VIII: 723, 4, 7), ROLICĂ Z. (VIII: 723, 4, 7).

Liceul „Mircea cel Bătrân", Constanţa.

Clasa a V-a: CUŞUTĂ H. A. (V: 850, 1, 2, 3, VI: 866).

Clasa a VIII-a: CUŞUTĂ H. H. (VIII: 723, 5, 6, 8, 9).

Colegiul Naţional „Carol I", Craiova.

Clasa a VI-a: DUMITRESCU P. (VI: 865).

Clasa a VII-a: BRAŞOVEANU D. G. (E. G.: 656, 8, 9, 67, 72, 3, 4, 5).

Liceul de fete „Elena Cuza", Craiova.

Clasa a IV-a: BÂRSAN M. (IV: 715, 6, 9, 22).

Clasa a V-a: GEORGESCU C. G. (V: 847).

Clasa a VI-a: CEAUŞU M. M. (VI: 866, 75, 7).

Clasa a VII-a: CUTIERU V. O. (VII: 815, 33), GRĂMESCU R. Z. (VII: 815, 6), JIENESCU I. M. (VII: 815, 6).

Liceul „I. C. Brătianu", Drăgăşani.

Clasa a IV-a: ANDREESCU G. V. (IV: 715, 6, 7).

Liceul „I. C. Brătianu", Pitești.

Clasa a VII-a: Bărbulescu V. (E. G.: 656, 7, 8, 9, 61).

Liceul „Sf. Petru și Pavel", Ploiești.

Clasa a VIII-a: Popa N. E. N. (VIII: 710, 2, E. G.: 646, 7, 8, 9).

Colegiul Național „N. Filipescu", Predeal.

Clasa a IV-a: Cernescu A. P. (IV: 721, 2, V: 855), Grigoriu I. D. (V: 848), Moțoiu S. M. (IV: 719, 219, 21, 2, V: 855), Moțoiu S. R. (IV: 719, 21, 2, V: 855).

Clasa a V-a: Cernescu A. N. (V: 855, 6, 61, 4), Constantinescu N. P. (V: 850, 1, 2, 4, 5), Diaconu G. V. (V: 847, 50, 1, 2, 3, 4, E. G.: 653, 4), Munteanu I. I. (V: 847, 50, 1, 2, 3, 4, 5, E. G.: 654, Roșu V. C. (V: 850, 1, 2, 3, 4), Stoian I. D. (V: 847, 50, 1, 2, 3, 4, E. G.; 653, 4).

Clasa a VIII-a: Iliescu C. V. (VIII: 723, 4, 5, 6, 7, 9), Marinescu M. (VIII: 723, 4, 5, 5, 7, 8, 9, 31, 2).

Liceul „Regele Ferdinand", Râmnicu-Sărat.

Clasa a VI-a: Pisanca N. I. (VI: 866).

Liceul „Tudor Vladimirescu", Târgu-Jiu.

Clasa a VIII-a: Bălănescu G. G. (VIII: 728, 31, 2, 42, 3, 4, 5).

Liceul Militar „Ștefan cel Mare", Timișoara.

Clasa a IV-a: Cocăneanu B. C. (IV: 716, 7, 9), Cocoș G. (IV: 716, 7), Coteț I. O. (IV: 717), Dumitrașcu M. (IV: 717), Dumitriu I. V. (IV: 719), Nițescu I. P. (IV: 714, 6), Rogoz V. T. (IV: 716, 7), Ruse G. I. (IV: 719), Sorin G. N. (IV: 716, 7), Stănescu M. I. (IV: 716), Zărnescu V. (IV: 719).

Clasa a VII-a: Cochela L. (VII: 817, 20, 1, 4), Filimon F. I. (VII: 817, 20, 1, 3, 4, 6, 9, 30, VIII: 727), Rogoz V. I. (VII: 829), Teodorescu A. A. (VII: 817, 20), Tripșa I. (VII: 817, 8, 20, 1, 3, 4).

Clasa a VIII-a: Cârstea D. M. (VIII: 724, 5, 6, 7, 8, 0), Dilski M. C. (VIII: 732, E. G.: 649, 4), Grigoraș G. (VIII: 732, E. G.: 643, 4), Nedelcu U. (VIII: 723, 4, 5, 7, 8, 9), Popescu I. B. (VIII: 724, 5, 6, 7, 8, 9), Sintescu V. M. (VIII: 732, E. G.: 643, 4, 56), Stan A. (VIII: 724, 5, 7, 8, 9), Țecu P. T. (VIII: 724, 5, 7, 8, 9).

Liceul „Sf. Haralambie", Turnu-Măgurele.

Clasa a VIII-a: Martin D. C. (VIII: 723, 5, 6, 7, 8, 9), Roșu S. A. (VIII: 725, 6, 7, 8, 9).

Liceul „Traian" Turnu-Severin.

Clasa a VII-a: Aldescu M. (VII: 827, 9, 34), Pârșan C. M. (VII: 815, 26, 9, 30, 1).

EXERCIȚII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Iulie 1945

Clasa a III-a. *Exerc. 282.* Se dau în plan două patrate ABCD și A'B'C'D' astfel că perechile de laturi (AB, A'B') și (BC, B'C') sunt respectiv paralele și de același sens.

Centrele lor O și O' sunt la distanța $\overline{OO'} = 3$ cm, iar laturile lor $\overline{AB} = 1{,}5$ cm și $\overline{A'B'} = 2$ cm.

Să se arate, că dreptele AA', BB', CC', DD' se întâlnesc în același punct I pe dreapta OO' și să se calculeze distanța punctului I la punctul O.

O. N. Ț.

III. 283. Fie cercul (I), diametrul său $\overline{OIA}$ și punctul B pe acest diametru astfel ca $\overline{BO} = \overline{OA}$. Din A construim tangentele $\overline{AD}$ și $\overline{AD'}$ a cercul (I) (D și D' fiind punctele de contact), apoi prelungim cu $\overline{DC} = \overline{D'C'} = \frac{1}{3}\overline{AD}$ segmentele $\overline{AD}$ și $\overline{AD'}$. Să se arate, că cercul AC'C este tangent cercului (I). Raza cercului (I) fiind egală cu *unitatea,* să se calculeze :

a) lungimile laturilor triunghiului AC'C;

b) lungimea coardei $\overline{EE'}$ pe cercul (I) o determină pe latura $\overline{CC'}$.

O. N. Ț.

III. 284. Se consideră cercul (O) cu raza cât *unitatea* și un punct I la distanța de centrul O egală cu lungimea laturii triunghiului echilateral înscris în cercul (O).

Fie $\overline{IC}$ și $\overline{IC'}$ tangentele duse din I la cercul (O), punctele C și C' fiind punctele de contact. Să se calculeze *perimetrul* și *aria* triunghiului AC'C, unde A este o extremitate a diametrului cercului (O) trecând prin punctul I.

O. N. Ț.

Clasa a IV-a. *Exerc. 731.* Pe o masă sunt farfurii întinse, adânci şi mici. Dacă ar fi încă 7 farfurii adânci, atunci numărul farfuriilor adânci ar fi *o treime* din numărul celor întinse. Numărul farfuriilor mici este *o cincime* din numărul farfuriilor întinse şi adânci la un loc, iar numărul total al farfuriilor aflate pe masă 78.

Câte farfurii întinse, câte farfurii adânci şi câte mici sunt pe acea masă ?

O. N. Ţ.

IV. 732. In curtea unui gospodar este o scară mică cu şase trepte neegale. Mergând de sus în jos găsim că treapta a *doua* este mai lungă decât *prima* cu $\frac{1}{6}$ din lungimea primei; a *treia* este mai lungă decât a doua cu $\frac{1}{7}$ din a doua; a *patra* treaptă este mai lungă decât a *treia* cu $\frac{1}{8}$ din a treia plus $\frac{3}{10}$ din a doua; a *cincea* treaptă este mai lungă decât a *patra* cu $\frac{1}{37}$ din lungimea celei de-a *patra* plus $\frac{1}{8}$ din a *treia;* a *şasea* treaptă este mai lungă decât a *cincea* cu $\frac{1}{31}$ din lungimea acesteia plus $\frac{1}{4}$ din lungimea celei de-a *treia.* Lungimea lemnului fasonat din care au fost tăiate treptele a fost 2,97 m, iar pentru facerea treptelor s'au făcut cinci tăieturi şi s'au pierdut 5 mm din lungimea lemnului. Care este lungimea primei trepte de sus ?

O. N. Ţ.

IV. 733. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$\frac{x-3y}{15} - \frac{2x-y+1}{12} = -2$$

$$\frac{3x-9y}{15} + \frac{4x-2y}{14} = +8$$

pe calea cea mai simplă şi să se verifice soluţia aflată.

O. N. Ţ.

IV. 734. Fie piramida oarecare SABCD. Se proiectează vârful S în A', B', C', D' respectiv pe AB, BC, CD, DA. Să se arate, că perpendicularele duse în planul bazei în A', B', C', D' respectiv AB, BC, CD, DA se întâlnesc în acelaşi punct. Proprietatea nu depinde de numărul laturilor poligonului de bază.

O. N. Ţ.

Clasa a V-a. *Exerc. 873.* Să se discute realitatea rădăcinilor ecuaţiei

$$x^4 - 2x^3 - (6 - k^2)\,x^2 - 2x + 1 = 0.$$

I. I. S.

V. 874. Să se rezolve ecuaţia reciprocă de gradul al IV-lea ştiind că între rădăcini avem relaţia

$$\frac{x_1 + \dfrac{1}{x_1}}{x_2 + \dfrac{1}{x_2}} = \frac{13}{6}$$

şi că ecuaţia de gradul al II-lea, ce se obţine prin substituţia cunoscută $x + \dfrac{1}{x} = y$, este tot reciprocă.

G. D. S.

V. 875. Se dă patrulaterul ABCD şi punctele M, N, P, Q, cari împart laturile AB, BC, CD, DA în acelaşi raport k.

Să se demonstreze, că oricare ar fi punctul O din planul patrulaterului, expresia

$$E \equiv \Sigma\, \overline{OA}^2 - \Sigma\, \overline{OM}^2$$

este constantă.

In particular, dacă patrulaterul este un patrat şi $k = 1$, expresia de mai sus ne dă aria patratului.

G. D. S.

V. 876. In cercul (O) de rază R este înscris exagonul regulat ABCDEF. Fie I intersecţia dreptelor CB, DE, M punctul unde raza trecând prin I taie cercul, iar N punctul (CD, AM). Să se calculeze:

a) laturile şi diagonalele patrulaterului ACMB;

b) aria patrulaterului ACMB;

c) lungimea segmentului $\overline{CN}$;

d) înălţimea DH a triunghiului ADN.

O. N. Ţ.

V. 877. Intr'un cerc de rază R este înscris decagonul regulat ABCDEFGHIJ. Să se calculeze, în funcţie de rază, distanţele vârfului A la laturile decagonului.

O. N. Ţ.

Clasa a VI-a. *Exerc. 890.* Intr'un triunghiu ABC se dau lungimile laturilor $\overline{BC} = a$ şi $\overline{AB} = c$, între unghiuri fiind dată relaţia $A = 2B$. Să se arate, cum se poate rezolva triunghiul şi ce relaţie între a şi c, pentru ca problema să fie posibilă. In ce caz triunghiul este dreptunghic.

Să se rezolve în cazul particular $a = 2$, $c = 3$.

I. I. S.

VI. 891. Să se arate, că într'un triunghiu dreptunghiu avem relaţiile

$$\operatorname{tg}(45^0 - B) = \frac{c - b}{c + b}$$

$$\operatorname{tg}B = \frac{4bc(c^2 - b^2)}{a^4 - 8b^2c^2} \quad ; \quad \operatorname{tg}2B + \operatorname{cotg}2B = \frac{a^4}{2bc(c^2 - b^2)}.$$

O. N. Ţ.

VI. 892. Dacă între laturile unui triunghiu dreptunghiu avem relaţia

$$ma = nb + pc,$$

unde m, n, p sunt trei numere pitagorice ($m^2 = n^2 + p^2$), atunci laturile a, b, c sunt respectiv proporţionale cu numerele m, n, p.

O. N. Ţ.

VI. 893. Dacă între laturile unui triunghiu dreptunghiu avem relaţia

$$ma = nb + pc, \tag{1}$$

unde m, n, p sunt o soluţie întreagă a ecuaţiei

$$p^2 + n^2 = 2m^2 \tag{2}$$

de forma

$$p = (r^2 - s^2)^2 - 8r^2s^2 \quad ; \quad n = (r - s)^4 - 4rs\,(r^2 - 3s^2)\,;$$

$$m = (r - s)^4 + 8rs^3,$$

atunci laturile a, b, c sunt respectiv proporţionale cu numerele

$$r^2 + s^2 \quad , \quad r^2 - s^2 \quad , \quad 2rs.$$

O. N. Ţ.

VI. 894. Să se rezolve un triunghiu, cunoscând o latură, o înălţime şi raza cercului înscris.

M. G.

VI. 895. Să se rezolve un triunghiu cunoscând un unghiu, o înălţime şi raza cercului înscris.

M. G.

Clasa a VII-a. *Exerc. 844.* Să se reprezinte grafic variaţia funcţiei

$$y = \pm \sqrt{\frac{x - 3}{x^2 - x - 2}}.$$

I. I. S.

VII. 845. Să se reprezinte funcţia

$$y = \frac{(x + 1)^2}{x + 2}.$$

N. M.

VII. 846. Se dă funcţia

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x^2 - y}{y^2 - x}}.$$

Să se arate că

$$\frac{xf'_x + yf'}{f'_x + f'_y} = \frac{x^2 + y^2 + xy}{x + y + 2xy - 1}.$$

N. M.

VII. 847. Să se studieze natura seriei

$$u_n = \frac{x_n}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}.$$

N. M.

VII. 848. Să se construiască şi să se rezolve triunghiul dreptunghic de arie maximă, cunoscând poziţiile unui vârf şi centrului său de greutate. Discuţie.

V. GH.

VII. 849. Se consideră funcţiunea

$$y = (x + a_1)(x + a_2) \ldots (x + a_n).$$

Să se arate că expresiunea

$$y'^2 - yy'' \geqslant 0$$

oricare ar fi valoarea dată lui x.

C. I. B.

VII. 850. Se dă funcţiunea

$$y = \operatorname{arctg}(x - a_1) + \operatorname{arctg}(x - a_2) + \ldots + \operatorname{arctg}(x - a_n)$$

unde

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n.$$

Să se arate că concavitatea curbei nu se schimbă în intervalul $(-\infty, a_1)$ şi $(a_n, +\infty)$.

C. I. B.

Clasa a VIII-a. *Exerc. 755.* Se duce prin focarul F al unei iperbole, perpendiculara pe axa transversă şi fie C unul din punctele unde această perpendiculară întâlneşte iperbola. Să se afle ecuaţiile tangentelor paralele, cari determină pe tangenta în C un segment egal cu $2\sqrt{a^2 + c^2}$.

G. D. S.

VIII. 756. Se dă parabola $y^2 - 2px = 0$.

Se cere locul punctului M, astfel ca tangentele duse din M la parabolă să determine pe tangenta la vârf un segment dat a.

G. D. S.

VIII. 757. Se dă parabola $y^2 - 2px = 0$.

Să se determine înclinarea tangentei pe care axele de coordonate taie un segment egal cu $p\sqrt{3}$.

G. D. S.

VIII. 758. Să se găsească şi să se construiască locul geometric al punctelor din plan $M(\alpha, \beta)$, pentru care ecuaţia

$$x^3 + \alpha x + \beta = 0$$

are jumătatea unei rădăcini inversa mediei armonice a celorlalte două

C. I. B.

VIII. 759. Dacă ecuaţia

$$x^3 + \alpha x + \beta = 0$$

are o rădăcină egală cu suma inverselor celorlalte două rădăcini, toate rădăcinile sunt reale.

C. I. B.

VIII. 760. Considerăm elipsa cu centrul O şi A, B două vârfuri consecutive, C al patrulea vârf al dreptunghiului OACB, M un punct curent pe elipsă; tangenta în M taie axele OA, OB în U şi V.

Să se arate că puterea punctului M faţă de cercul descris pe UV ca diametru este egală cu $\overline{OC}^2 - \overline{OM}^2$.

N. M.

VIII. 761. Din punctul C (0, b) ca centru, ducem un cerc tangent ramurilor iperbolei

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Să se afle coordonatele punctelor de contact.

N. M.

VIII. 762. Să se determine λ astfel ca ecuaţiile

$$4x^3 + \lambda x - 2 = 0 \quad , \quad 2x^2 + \lambda x - 2 = 0$$

să admită o rădăcină comună. Să se rezolve ecuaţiile.

I. I. S.

Exerciţii Generale. *Exerc. 699.* Să se arate, că bipatratul oricărui număr prim, mai mare ca 3, este $\mathcal{M}.24 + 1$.

I. L.

E. G. 700. Să se arate, că bicubul oricărui număr prim, mare ca 3, este $\mathcal{M}.36 + 1$.

I. L.

E. G. 701. Să se arate, că bipatratul sau bicubul indicatorului unui număr prim mai mare ca 3, poate să fie de una din formele $\mathcal{M}.6^4$ şi $\mathcal{M}.6^6$.

I. L.

E. G. 702. Dacă, după ce extragem cubica a unui număr cu o aproximație de o unitate, obținem un rest mai mic decât rădăcina, atunci aproximația va fi $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

I. L.

E. G. 703. Să se arate, că ecuația

$$x^2 + 7y^2 = z^2$$

are soluții în numere întregi.

I. L.

E. G. 704. Să se arate, că ecuația

$$x^2 + y^2 = 5z^2$$

are soluții în numere întregi.

I. L.

E. G. 705. Să se examineze, dacă ecuația

$$x^2 + 2xy + my^2 + 2n(x + y) = 0$$

are soluții în numere întregi, m și n fiind numere întregi.

I. L.

E. G. 706. Să se examineze, dacă ecuația

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = m$$

are soluții întregi, numerele a, b, c, m fiind numere întregi, iar $b^2 - ac = 0$.

I. L.

E. G. 707. Să se arate, că suma patratelor a trei numere întregi consecutive dintr'o progresie aritmetică nu poate să fie egală cu patratul numărului imediat superior.

I. L.

INSTRUCŢIUNI

Pentru redactarea şi trimiterea soluţiunilor exerciţiilor publicate în *Gazeta Matematică Supliment cu exerciţii* se vor avea în vedere *Instrucţiunile* publicate în numerele 1, 2 şi 3 pe copertă.

Drepturile de reproducere rezervate Societăţii «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII şi VIII, cu bogată activitate la această revistă îşi pot lărgi cadrul activităţii rezolvând şi probleme din „Gazeta Matematică".

În Biblioteca Societăţii „Gazeta Matematică" au apărut şi se găsesc următoarele:

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică,* Ediţia VIII-a . . . . . Lei 1.000

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 100

X. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . . Lei 1.200

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învăţăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 500 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . Lei 300

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 900

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica raţionată . . . . . Lei 1.500

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 700

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 1.000

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 1.000

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 400

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 600

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . Lei 1.500

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de analitică.* Ediţia II. Partea II adăogită de **N. G. Botea** şi **C. Ionescu-Bujor** . . . . . Lei 900

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 600

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . Lei 700

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu: Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 500

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"
(Tipărită din fondul Anghel Saligny)

I. Ion Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a). . . . . Lei 600

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA"

I. Ion Ionescu, *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 600

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 1.000 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158. — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ — C. 30.375

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

LICEUL „GH. LAZĂR" - SIBIU
Biblioteca Profesorilor
No. 8769

ANUL XI. No. 8 1 MAI 1945

9090

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 7-3809

GAZETA MATEMATICA
SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL XI. No. 8 — 1 MAI 1945

ABONAMENTUL LEI 300 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

PUNCTUL ŞI CERCURILE LUI LEMOINE

1°. **Proprietate a dreptelor izogonale.** Fie dat unghiul xOy şi M, N două puncte pe două drepte izogonale[1]) O_u, O_v — (M_x, N_x), (M_y, N_y) proiecţiile punctelor M, N pe O_x, O_y.

Din asemănarea triunghiurilor MOM_x, NON_y rezultă

$$\frac{\overline{MM_x}}{\overline{NN_y}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{ON}},$$

iar din asemănarea triunghiurilor MOM_y, NON_x,

$$\frac{\overline{MM_y}}{\overline{NN_x}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{ON}}.$$

Rezultă: $\frac{\overline{MM_x}}{\overline{NN_y}} = \frac{\overline{MM_y}}{\overline{NN_x}}$ sau $\frac{\overline{MM_x}}{\overline{MM_y}} = \frac{\overline{NN_y}}{\overline{NN_x}}$.

Deci *raportul distanţelor unui punct* M *la laturile unui unghiu* yOx *este invers cu raportul distanţelor la aceleaşi laturi ale unui punct situat pe izogonala dreptei* OM.

2°. **Proprietate a simedianelor.** *Raportul distanţelor unui punct situat pe simediana*[2]) *unui triunghiu, la laturile adiacente, este egal cu raportul acestor laturi.*

Fie S un punct pe simediana vârfului A şi M mijlocul laturii BC — (S_b, M_b), (S_c, M_c) proiecţiile punctelor S, M pe AC, AB. După proprietatea 1°,

$$\frac{\overline{SS_b}}{\overline{SS_c}} = \frac{\overline{MM_c}}{\overline{MM_b}}.$$

---

1) A se vedea definiţia dreptelor izogonale în S. E. G. M., Vol. XI, Nr. 4, pag. 53.

2) Definiţia simedianelor în S. E. G. M., Vol. XI, p. 55. Alte proprietăţi ale simedianelor în S. E. G. M., Vol. XI, Nr. 5.

Dar din triunghiurile echivalente AMB, AMC, rezultă

$$\overline{MM_c} \cdot \overline{AB} = \overline{MM_b} \cdot \overline{AC}$$

sau $$\frac{\overline{MM_c}}{\overline{MM_b}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \quad \text{deci} \quad \frac{\overline{SS_b}}{\overline{SS_c}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$

3°. **Proprietate reciprocă.** *Orice punct* M *astfel că raportul distanţelor la două laturi ale unui triunghiu este egal cu raportul acestor laturi, se află pe simediana vârfului comun celor două laturi.*

Pentru demonstrare se urmează în sens invers calea urmată în dovedirea proprietăţii directe.

4°. **Punctul lui Lemoine.** *Depărtările punctului lui Lemoine*[1] K *la laturile triunghiului de referinţă sunt proporţionale cu aceste laturi.*

Notând K_a, K_b, K_c proiecţiile lui K pe BC, CA, AB, cum K se află pe simedianele vârfurilor, A, B, rezultă:

$$\frac{\overline{KK_b}}{\overline{KK_c}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}, \quad \frac{\overline{KK_c}}{\overline{KK_a}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \quad \therefore \quad \frac{\overline{KK_a}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{KK_b}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{KK_c}}{\overline{AB}}.$$

5°. **Calculul depărtărilor punctului** K **de laturi.** Din ultima relaţie, deducem:

$$\frac{\overline{KK_a} \cdot \overline{BC}}{\overline{BC}^2} = \frac{\overline{KK_b} \cdot \overline{CA}}{\overline{CA}^2} = \frac{\overline{KK_c} \cdot \overline{AB}}{\overline{AB}^2} =$$

$$= \frac{2(\text{aria}KBC + \text{aria}KCA + \text{aria}KAB)}{\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2} = \frac{2\,\text{aria}\,ABC}{\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2}.$$

Deci: $$\overline{KK_a} = \frac{2\overline{BC} \cdot \text{aria}\,ABC}{\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2}, \text{ etc.}$$

6°. **Primul cerc al lui Lemoine.** *Coardele primului cerc al lui Lemoine*[2] *aflate pe laturile triunghiului de referinţă sunt proporţionale cu cuburile acestor laturi.*

A_b, A_c fiind punctele în care antiparalela laturii BC, dusă prin mijlocul lui AK, taie dreptele AC, AB — B_c, B_a, C_a, C_b, punctele analoage — se ştie că punctele A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b

1) Definiţia şi proprietăţi în S. E. G. M., Vol. XI, Nr. 4, 5, 6 (notele de geometrie).

2) Definiţie şi proprietăţi în S. E. G. M., Vol. XI, p. 87.

sunt pe un cerc numit *primul cerc a lui Lemoine,* iar dreptele $B_c C_b$, $B_a A_b$, $C_a A_c$ sunt paralele cu BC, AB, AC şi trec prin K.

Din asemănarea triunghiurilor $KB_a C_a$, ABC, rezultă:

$$\frac{\overline{B_a C_a}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{KK_a}}{\overline{AA'}} \quad (\overline{AA'} \text{ este înălţimea vârfului A}),$$

sau

$$\overline{B_a C_a} = \overline{BC} \cdot \frac{2\,\overline{BC}\,\text{aria ABC}}{\overline{BC^2}+\overline{CA^2}+\overline{AB^2}} \cdot \frac{\overline{BC}}{2\,\text{aria ABC}} = \frac{\overline{BC^3}}{\overline{BC^2}+\overline{CA^2}+\overline{AB^2}}.$$

Şi cu relaţiile analoage,

$$\frac{\overline{B_a C_a}}{\overline{BC^3}} = \frac{\overline{C_b A_b}}{\overline{CA^3}} = \frac{\overline{A_c B_c}}{\overline{AB^3}} = \frac{1}{\overline{BC^2}+\overline{CA^2}+\overline{AB^2}}. \qquad (1)$$

Segmentele formate de primul cerc al lui Lemoine pe oricare latură a triunghiului de referinţă, sunt proporţionale cu patratele laturilor triunghiului.

Triunghiurile $KA_b C_b$ şi BAC sunt asemenea. Deci

$$\frac{\overline{C_b K}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A_b C_b}}{\overline{AC}} \quad \therefore \quad \overline{C_b K} = \overline{BC} \cdot \frac{\overline{AC^3}}{\overline{BC^2}+\overline{CA^2}+\overline{AB^2}} \cdot \frac{1}{\overline{AC}}$$

şi cum $\overline{C_b K} = \overline{CC_a}$,

$$\frac{\overline{CC_a}}{\overline{AC^2}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BC^2}+\overline{CA^2}+\overline{AB^2}}.$$

Analog, din asemănarea triunghiurilor $KA_c B_c$, ABC, deducem:

$$\frac{\overline{BB_a}}{\overline{AB^2}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BC^2}+\overline{CA^2}+\overline{AB^2}}$$

şi din (1), cu relaţiile precedente, rezultă

$$\frac{\overline{BB_a}}{\overline{AB^2}} = \frac{\overline{B_a C_a}}{\overline{BC^2}} = \frac{\overline{C_a C}}{\overline{CA^2}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BC^2}+\overline{CA^2}+\overline{AB^2}},$$

deci proprietatea este adevărată.

7°. **Al doilea cerc al lui Lemoine.** *Coardele celui de-al doilea cerc al lui Lemoine*[1]*, aflate pe laturile triunghiului de referință, sunt proporționale cu cosinusurile unghiurilor opuse acestor laturi.*

Fie A_b, A_c punctele în care antiparalela dusă prin K taie laturile AC, AB — B_a, B_c, C_a, C_b puncte analoage. Punctele A_b, A_c, B_a, B_c, C_a, C_b sunt pe *al doilea cerc al lui* LEMOINE.

Avem:

$$\sphericalangle KB_a C_a = \sphericalangle KC_a B_a = \sphericalangle A,$$

deci triunghiul $KB_a C_a$ este isoscel și

$$\overline{B_a C_a} = 2\overline{KK_a}\ \operatorname{cotg} A$$

sau

$$\frac{\overline{B_a C_a}}{\cos A} = 2\,\frac{\text{aria } ABC}{\overline{BC}^2+\overline{CA}^2+\overline{AB}^2}\cdot\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{4R\,\text{aria } ABC}{\overline{BC}^2+\overline{CA}^2+\overline{AB}^2},$$

deoarece

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = 2R \quad (R \text{ raza cercului circumscris})$$

și cum

$$4R\,\text{aria } ABC = \overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA},$$

$$\frac{\overline{B_a C_a}}{\cos A} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}}{\overline{BC}+\overline{CA}^2+\overline{AB}^2}.$$

Lucrând analog, se găsește:

$$\frac{\overline{B_a C_a}}{\cos A} = \frac{\overline{C_b A_b}}{\cos B} = \frac{\overline{A_c B_c}}{\cos C} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}}{\overline{BC}^2+\overline{CA}^2+\overline{AB}^2}.$$

C. IONESCU-BUJOR.

---

1) Definiție în S. E. G. M., Vol. XI, p. 87.

EXERCIȚII REZOLVATE

Exerciții Generale. *Exerc. 672. Cu cifrele 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, luate câte o singură dată, să se formeze trei numere de câte trei cifre așa ca unul să fie egal cu suma celorlalte două.*

GH. B.

Un corespondent dela Colegiul Național „Sf. Sava" trimite o soluție redijată în felul următor:

„Răspuns. *Nu pentru faptul că acest răspuns se prezintă sub formă „de ghicitoare deslegată, dar pentru satisfacerea dorinței „mele de a ști, aș dori să știu cum se poate ajunge pe cale „algebrică la soluția pe care am găsit-o numai prin încercări. „Sau această cale algebrică nici nu există? Să închid „paranteza și să comunic răspunsul meu care este:*

„$326 + 479 = 805$".

Exerciții de această natură se găsesc în multe reviste. Un exemplu este problema 3672 rezolvată la pag. 226, Vol. XXXV, *Gazeta Matematică* unde se cer *trei numere de câte trei cifre semnificative și diferite astfel ca unul să fie egal cu suma celorlalte două.* De exemplu:

$$493 + 182 = 675 \quad , \quad 593 + 271 = 864, \text{ etc.}$$

Aceste probleme nu sunt *ghicitori*, ele cer un raționament și o examinare atentă a tuturor cazurilor posibile.

Rezolvarea pe calea ghicitului nu intră în metoda matematică.

Satisfacem curiozitatea corespondentului *ghicitor* și dăm în cele ce urmează soluția exercițiului.

Fie deci *abc*, *def*, *ghi* cele 3 numere așa încât

$$abc + def = ghi \qquad (1)$$

Această egalitate atrage pe

$$abc + def + ghi = 2 \times ghi$$

și deoarece suma cifrelor numerelor căutate este $44 - 3m - 1$ rezultă că

$$2 \times ghi = 3m - 1 \quad \therefore \quad ghi = 3p + 1.$$

Cum

$$0+2+3=5<g+h+i\leqslant 7+8+9=24$$

urmează că $g+h+i$ poate avea valorile

7, 10, 13, 16, 19 sau 22.

Din (1) se vede că $g\neq$ şi de 0 şi de 2, căci altfel $a+d$ va fi $>d$.

Cu aceste observaţiuni formăm următoarele tablouri, uşor de construit, care dau atât valorile sumei $S=g+h+i$ cât şi valorile cifrelor g, h, i.

S	10					7		
g	3	4	6	7	8	3	4	5
h	0	2	0	0	0	0	0	0
i	7	5	6	4	3	2	4	3	2

S	13													
g	3		4		5		6		7		8		9	
h	2	4	0	2	3	0	2	0	2	3	2	3	0	2	0
i	8	6	9	7	6	8	6	7	5	4	5	4	5	3	4

S	16														
g	3		4		5		6		7		8		9		
h	4	5	6	3	5	2	3	4	2	3	0	3	4	0	2	0
i	9	8	7	9	7	9	8	7	8	7	9	6	5	5	3	4

S	22				19											
g	7	8	9	9	9		8		7		6		5	4		
h	6	5	5	6	2	3	4	2	4	5	4	3	4	5	6	6
i	9	9	8	7	8	7	6	9	7	6	8	9	9	8	8	9

Din (1) se vede că dacă din o soluţie găsită se pot obţine alte soluţii schimbând pe c cu f, sau pe b cu e, sau pe a cu d.

Vom considera deci numai soluţiile în care $a < d$, $b < e$, $c < f$ pe care le vom numi soluţii *primitive* spre deosebire de celelalte pe care le numim soluţii *derivate*.

In fine mai observăm că în tablourile precedente se poate shimba h cu i fără ca S să se schimbe, deci la o valoare a lui S şi g vom asocia pe rând pe hi şi pe ih.

Cu aceste observaţiuni trecem la examinarea *tuturor* cazurilor posibile din tablourile precedente. Dăm aici numai 2 exemple din acele examinări.

Luăm din ultimul tablou grupa $ghi = 769$ sau 796. Trebue deci să avem

$abc + def = 769$, cifrele rămase fiind 0, 2, 3, 4, 5, 8.

Se vede că 9 se obţine numai din $4 + 5$ din $c + f = 4 + 5$. Oricum am asocia restul de 4 cifre rămase nu obţinem pentru $b + c$ o sumă terminată la unităţi cu 6.

Examinăm la fel cazul

$$abc + def = 796$$

şi conchidem că aceste grupe nu dau nicio soluţie.

Alt exemplu. Luăm din tabloul al doilea grupa 6, 0, 7 şi avem

$abc + def = 607$, restul cifrelor fiind 2, 3, 4, 5, 8, 9.

Ultimele 7 se pot obţine, din cifrele rămase, în următoarele 3 feluri:

1) $2 + 5$, atunci adunând 2 din cifrele rămase 3, 4, 8, 9 nu se obţine un număr terminat cu 0.

2) $3 + 4$ şi atunci $2 + 8 = 10$. Ar trebui ca $a + d + 1 = 6$ ceea ce nu se poate căci cifrele rămase 5 şi 9 dau $5 + 9 + 1 = 15$.

3) $8 + 9 = 17$ deci trebue ca $1 + b + e$ să se termine cu 0. Aceasta are loc pentru $b = 4$, $e = 5$ şi obţinem soluţia primitivă

$$248 + 359 = 607.$$

Cazul $abc + def = 670$ nu dă soluţii.

Procedând pe această cale, găsim că problema are următoarele 11 soluţii *primitive*, scrise în ordinea crescând a lui *ghi*:

$$057 + 289 = 346 \; ; \quad 075 + 289 = 364 \; ; \quad 058 + 369 = 427;$$
$$037 + 489 = 526 \; ; \quad 073 + 489 = 562 \; ; \quad 248 + 359 = 607;$$
$$326 + 479 = 805 \; ; \quad 054 + 769 = 823 \; ; \quad 326 + 578 = 904;$$
$$253 + 687 = 362 + 578 = 940.$$

Fiecare soluție primitivă dă loc la alte 3 soluții *derivate*. Astfel de exemplu din a treia soluție deducem

$$058 + 369 = 059 + 368 = 068 + 359 = 069 + 358 = 427.$$

Problema are deci în total 44 de soluții.

Partea curioasă a problemei este că numărul soluțiilor este egal cu suma cifrelor date.

Până la 1 Aprilie 1945 s'au primit soluții bune dela:

Liceul „Samuil Vulcan", Beiuș-Bihor.

Clasa a V-a: Popa N. (E. G.: 662), Pantea A. (E. G.: 662).

Clasa a VIII-a: Ardelean V. A. (E. G.: 656, 7, 8, 61), Popa D. V. (VII: 731, 44).

Liceul „N. Bălcescu", Brăila.

Clasa a VII-a: Brezeanu G. F. (VII: 823, 4, 6, 7), Coșovlui I. O. (VII: 823, 4, 5, 6, 8), Gheţu G. E. (VII: 823, 4, 5, 6, 34, 5), Novac I. I. (E. G.: 667), Roșca G. (VII: 823, 4, 5, 6, 7, 34, 5, E. G.: 667).

Clasa a VIII-a: Beșchea I. R. (VIII: 731, 3, 4, 43, 53, 4).

Colegiul Național „Sf. Sava", București.

Clasa a IV-a: Antonescu G. G. (IV: 719, 20, 1, 2), Zamfirescu I. M. (IV: 719, 20, 1, 2, 5).

Clasa a VII-a: Cornea T. T. (VII: 830, 1, 7, 8, VIII: 733, 53, E. G.: 668, 9, 71, 82, 3, 4, 5, 6, 7, 95, 7, 8), Creţu M. (E. G.: 682, 3, 6, 7), Morait A. (VII: 832, 8, 9, 40, E. G. 686, 7), Săvescu A. M. (VII: 833, 4, 5, 7, 8, 9, VIII: 753, E. G.: 663, 4, 5, 6, 73, 4, 5, 82, 3, 4, 6, 7, 95).

Clasa a VIII-a: Alexandru M. (VIII: 742, 3, 4, 5, 8), Cunescu T. R. (VIII: 731, 2, 3, 7), Niculescu V. D. (VIII: 731, 9, 43, E. G.: 663, 5, 86, 7), Soare V. M. (VIII: 739, 40, 7, 8, 9, 53, 4, E. G.: 663, 4, 9, 70, 1, 7, 8, 82, 3, 6, 8, 9, 95, 6, 7).

Institutul de fete „Sf. Maria", București.

Clasa a VI-a: Prassa G. Alexandra (VI: 877, 9).

Liceul „Aurel Vlaicu", București.

Clasa a IV-a: Nicolau D. C. (IV: 712).

Clasa a VII-a: Barbaiani A. M. (VII: 817), Leon A. M. (VII: 817, 8, 9, 20, 1, VIII: 725, 3, E. G.: 652, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 60, 1, 2, 3, 5, 6, 7).

Clasa a VIII-a: Dumitrescu V. (VIII: 726, 8, 9, 30, E. G.: 662, 3).

Liceul „C. Brâncoveanu" Bucureşti.

Clasa a VII-a: Leonida H. (VII: 830, 1, 3).

Liceul „Cantemir-Vodă", Bucureşti.

Clasa a IV-a: Nicolescu P. (IV: 719).
Clasa a VI-a: Chiriţă I. I. (VI: 884, 7), Ianovici B. A. (VI: 879).
Clasa a VIII-a: Ţifescu G. R. (VIII: 730, 2, 8, E. G.: 662).

Liceul „Cultura" Nr. 2, Bucureşti.

Clasa a V-a: Juster M. N. (E. G.: 662), Löbel A. I. (E. G.: 662).
Clasa a VIII-a: Wisner P. (VIII: 725, 32, 3, 4, 7, 42, 3, 53, 4).

Liceul de fete „Iulia Haşdeu", Bucureşti.

Clasa a VI-a: Stănescu Magdalena (VI: 864, E. G.: 661).

Liceul „Gheorghe Lazăr", Bucureşti.

Clasa a IV-a: Patraulea-Rizeanu G. A. (IV: 709, 25, 7, 8).
Clasa a VI-a: Chirilă A. R. (VI: 876, 7, 82, 5), Vilag M. M. (VI: 873).

Liceul „Matei Basarab", Bucureşti.

Clasa a VII-a: Matei G. A. (VII: 822, 9, 33, 4, 5).
Clasa a VIII-a: Christodor V. V. (VIII: 730, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, E. G.: 662), Dorobanţu Şt. (VIII: 731, 2, E. G. 662), Ieşan A. (VIII: 731, 2, 43, 4, 6, 7, 8, E. G.: 667, Ispas C. (VIII: (VIII: 730, 3, 44), Muntz M. E. (VIII: 730, 2, 5, 6, 7, 44, 7, E. G.: 662, 3, 86).

Liceul „Mihai Viteazul", Bucureşti.

Clasa a IV-a: Culcer G. M. (IV: 719).
Clasa a V-a: Iosifescu M. (V: 834, 65, 6, 9, E. G.: 686, 71, 96), Petcu A. V. (V: 855, 6), Stavru C. (V: 855, 6, Teodorescu C. D. (V. 855).

Liceul de fete „Regina Maria", Bucureşti.

Clasa a III-a: Mayer A. Adina (III: 274)

Liceul „Sf. Andrei", Bucureşti.

Clasa a VII-a: Chiraleu S. I. (VII: 835, VIII: 742).

Liceul „Sf. Iosif" Bucureşti.

Clasa a VIII-a: Ciropol S. N. (VIII: 732, 44), Mihăilescu E. (VIII: 732, 8).

Liceul „Titu Maiorescu", Bucureşti.

Clasa a IV-a: Biluseac G. C. (IV: 723, 7, 8, V: 855), Boşca N. D. (IV: 721, 2, 8), Chirilă G. C. (IV: 727, 8), Georgescu N. P. (IV: 727), Grigorescu C. (IV: 712), Mâneasă V. (IV: 727, 8), Pomponiu G. G. (IV: 727, 8, 9), Poenaru I. P. (IV: 727, 8), Rasidescu S. (IV: 725, 7, 8, 30), Toruca D. V. (IV: 727, 8).

Clasa a VI-a: Cojocaru I. A. (VI: 834, 76, Doneaud E. A. (VI: 833, 72, 4, 7, 8, 85, Haret S. R. (VI: 834, 72, 3, 4, 6, E. G.: 686), Lahovary N. V. (VI: 884), Seni D. (VI: 874, 6, VIII: 732).

Clasa a VIII-a: Cantuniar I. C. (VIII: 733, 7, 8), Iorgu R. (VIII: 730), Mateescu G. A. (VIII: 747, 8), Mustăcescu T. (VIII: 731).

Liceul Ortodox „Zoe Romniceanu", Bucureşti.

Clasa a IV-a: Sinadinovici Blaga (IV: 719, 20), Luchian Cornelia (IV: 719, 20).

Şcoala Centrală de fete, Bucureşti.

Clasa a IV-a: Anegroaie C. Valentina (IV: 719), Luca M. Mihaela (IV: 716, 7, 9), Negulescu Lucia (716, 7, 9).

Clasa a VI-a: Dumitrescu I. Aurelia (VII: 830, 3).

Clasa a VII-a: Andreian Calvinia (VII: 832).

Clasa a VIII-a: Nedelcu Vasilica (VIII: 727), Ţeican D. Maria (VIII: 727, 32).

Şcoala Normală de fete „I. Otetelişanu" Măgurele-Ilfov.

Clasa a IV-a: Moldoveanu M. Natalia (IV: 719).

Seminarul Central Bucureşti.

Clasa a VIII-a: Mocanu M. P. (VIII: 731, 6, 8, 43, 4, 5, 7, 8, 9, 50. E. G.: 672, 3, 4, 86, 8, 9, 95, 8).

Liceul Internat, Buftea.

Clasa a IV-a: Tanascu C. M. (IV: 727, 8, 9. V: 865).

Liceul „Ştirbei-Vodă", Călăraşi.

Clasa a VI-a: Echişciolu C. E. (VI: 873).

Clasa a VIII-a: Giuglea V. M. (VIII: 732).

Liceul „D. B. Ştirbey", Câmpina.

Clasa a VIII-a: Filip G. P. (VIII: 731, 2, 3, 6, 8, 42), Macovei A. E. (VIII: 731, 2, 3, 7, 8, 42).

Liceul Militar Câmpulung-Muscel.

Clasa a IV-a: Vasiliu N. (E. G.: 665), Asandei N. (V: 448).

Clasa a V-a: Bosinceanu P. P. (VIII: 727), Botezatu I. I. (VIII: 727), Corduneanu C. (V: 847, E. G.: 653, 4, 65), Drăghicescu C. (V: 847, E. G.: 653, 4, 5), Filip V. I. (V: 854, VIII: 727), Gâlea N. N. (VIII: 727), Gheorghiu V. P. (VIII: 727), Gongu I. R. (VIII: 727), Foghel D. G. (V: 848), Huidaş V. A. (V: 848, VIII: 727, E. G.: 658), Mardare M. (VIII: 727), Niculescu I. A. (VIII: 727), Păstrăvanu G. D. (VIII: 727), Platon C. F. (V: 853, E. G.: 656, 7), Tofan C. A. (V: 848, 53, VIII: 727, E. G.: 652, 31, 4, 6, 7, 8, 60, 1, 7, 71), Toma G. O. (VIII: 727).

Clasa a VI-a: Bârsănescu V. (VI: 873), Diaconu G (VI: 873), Munteanu S. (E. G.: 653, 73), Paraschivescu C. M. (VI: 873, E. G.: 653, 73), Vlad M. (VII: 808, E. G.: 658, 73).

Clasa a VII-a: Bârzescu M. (VII: 839), Ciobanu R. (VII: 837, 9), Ciobotă F. (VII: 830, 7, 9, E. G.: 686), Ciureanu G. M. (VII: 829, 30, 1, 9), Ciureanu C. (E. G.: 653, 5, 61, 73), Ciumaşu V. (VII: 829, 30, 1, 2, 7, 9, E. G.: 653), Dimitriu N. (VII: 837), Dumitrescu V. (VII: 837, 9), Haisuc P. M. (VII: 839), Lixandru S. N. (VII: 837, 9), Nache D. D. (VII: 829, 30, 1, 2, 7, 8, 9, 40. VIII: 732, 40, 1, 53, 4, E. G.: 652, 3, 6, 8, 63, 5, 69, 81, 6, 8, 95), Pironcof M. (VII: 829, 37, 8), Popa I. C. (VII: 839), Paloşaru N. (VII: 837, 9), Şerban N. (VII: 829, 30, 1, 2, 7, 9, E. G.: 652, 3, 5), Ştefănescu A. A. (VII: 830, 1), Stan G. C. (VII: 829, 30, 1).

Clasa a VIII-a: Ştefan N. D. (VIII: 725, 6, 7, 31, 2, 8), Ioan Em. (E. G.: 646, 8, 9, 53, 6, 8, 9, 61), Minculescu A. (VIII: 728, 9, 30, 1, E. G.: 652, 3, 8, 9, 61, 3, 7, 8, 9, 70, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 88), Mihăilescu I. S. (VIII: 725, 6, 7, 8, 9, 30, 2, E. G.: 652, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 60, 1, 2, 3, 5, 6, 7), Percea D. (VIII: 730, 53, 7, E. G.: 695, 8), Petrescu V. (VIII: 727, 8, 32), Popescu V. I. (VIII: 727, 30, 2), Rolică Z. (VIII: 727, 32), Teodorescu G. V. (VIII: 732).

Liceul „Mircea cel Bătrân", Constanţa.

Clasa a V-a: Cuşută A. (E. G.: 663).

Clasa a VIII-a: Cuşută H. (VIII: 730, E. G.: 662, 37).

Colegiul Naţional „Carol I", Craiova.

Clasa a V-a: Herţa N. N. (V: 856).

Clasa a VI-a: Dumitrescu P. (VI: 873, 85).

Clasa a VII-a: Braşoveanu D. G. (VII: 818, E. G.: 681, 6, 7).

Liceul de fete „Elena Cuza", Craiova.

Clasa a IV-a: Bârsan M. Maria (IV: 721).

Clasa a VII-a: Cutieru V. Olga (VII: 822, 4, 34, 5), Grămescu Zenovia (VII: 822, 3, 9, 30, 1, 3, 4, 5), Jienescu I. Marilena (VII: 822, 4, 9, 30, 1, 3, 4, 5).

Liceul Militar Craiova.

Clasa a V-a: Georgescu A. C. (V: 855, 6), Ivanov V. O. (V: 855, 6), Matei M. I. (V: 855, 6, 65, 6), Stănescu N. V. (V: 855, 6), Stănescu N. I. (V: 855, 6), Temişan I. V. (V: 855), Vitorsca A. (V: 865).

Clasa a VII-a: Popovici C. H. (VII: 829).

Clasa a VIII-a: Damian N. S. (VIII: 733, 5).

Liceul „I. C. Brătianu", Piteşti.

Clasa a VII-a: Bărbulescu V. (E. G.: 667, 8).

Liceul „Sf. Petru şi Pavel", Ploieşti.

Clasa a VI-a: Dumitrescu I. M. (VI: 873, 4).

Clasa a VII-a: Iordăchescu C. G. (VII: 827, 9, 30, 1, 3, 4, 7, E. G.: 663).

Clasa a VIII-a: Popa N. (VIII: 711, 25, 6, 7, 8, 9, 30, 2, E. G.: 652, 3, 4, 5, 62, 86).

Colegiul Naţional „N. Filipescu", Predeal.

Clasa a III-a: Făcăoaru I. (III: 281), Mircea T. (III: 276), Neacşu I. (III: 276), Răduţ C. (III: 277), Şerbu C. (III: 278), Sulica A. (III: 281).

Clasa a IV-a: Cernescu A. P. (IV: 719, 23, 5, 7, 8, 9, 30, V: 861, 5, 6, 9, VI: 829, 33), Ciubotaru I. (IV: 727, 8, 9, 30), Grigoriu I. D. (IV: 723, 7, 8, 30), Hristea F. T. (IV: 727, 8, 9, 30), Marcu D. V. (IV: 727, 9, 30), Moţoiu S. M. (IV: 723), Moţoiu S. R. (IV: 723), Munteanu G. V. (IV: 727, 8, 9, 30), Olteanu I. G. (IV: 727, 8).

Clasa a V-a: Albu N. I. (V: 855, 6), Bellu C. (V: 855, 6, 61), Boiangiu C. (V: 855, 6), Bogdan P. F. (V: 855, 6), Cernescu A. N. (V: 865, 6, 9, VII: 829), Constantinescu P. (V: 855, 6, 61, 5. VII: 839), Diaconu G. V. (V: 855, 6, 7, 61, VII: 839), Dolgu D. G. (V: 855, 6, 61, 5, VII: 839), Furtunescu M. H. (V: 855, 6, 61), Ianculescu Ş. Ş. (V: 855), Munteanu T. I. (V: 856, 7, 61, VII: 839), Popescu T. I. (V: 855, 6, 61), Roşu V. C. (V: 855, 6, 7, 61. VII: 839), Rotaru I. (V: 855, 6, 61), Stoian D. (V: 855, 6, 7, 61. VII: 839).

Clasa a VI-a: Badea D. M. (VI: 873, 4, 8, 9, 82), Vladimir N. C. (VI: 873, 8, 9, 86).

Clasa a VII-a: Săvescu A. M. (VII: 830), Volanschi A. D. (VII: 826, 7, 9, 30, 1, 4, 9), Vulcan V. (VII: 826, 7, 39).

Clasa a VIII-a: Iliescu C. V. (VIII: 730, 1, 2, 3, 43. E. G.: 662), Marinescu M. (VIII: 730, 3, 5, 42, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 50, 1, 3, 4. E. G.: 662).

Liceul „Regele Ferdinand", Râmnicu-Sărat.

Clasa a VI-a: Pisanca N. I. (VI: 875, 88).

Liceul Militar Timişoara.

Clasa a IV-a: Cocăneanu C. (IV: 712), Dârlea C. (IV: 712), Dumitrescu M. (IV: 712, 3), Ionescu P. (IV: 712), Niculescu N. I. (IV: 716, 7), Niţescu P. (IV: 712, 3), Răuţ R. (IV: 712), Ruse G. I. (IV: 727, 8), Stănescu I. (IV: 712), Zărnescu V. (IV: 712, 27, 8).

Clasa a V-a: Baranga T. I. (V: 855, 6), Cosma V. D. (V: 853, E. G.: 662, 3, 7), Iliescu V. I. (V: 856), Mănescu N. I. (V: 855, 6), Stoichiţă S. M. (E. G.: 662, 3).

Clasa a VI-a: Orho I. (E. G.: 662, 3, 4), Vasie M. G. (E. G.: 663).

Clasa a VII-a: Chirilovici C. D. (VII: 837), Chiricescu S. S. (VII: 817, 8, 30, 1), Cochela I. L. (VII: 827, 30, 1, E. G.: 664), Filimon I. (VII: 833, 4, 5, E. G.: 662, 3, 86), Gheorghiu G. M. (VII: 830, 1), Marinescu S. (VII: 817, 8, 21, 7, 30, 1, E. G.: 663), Popescu M. S. (VII: 817), Rogoz I. (E. G.: 663), Silişteanu D. D. (VII: 817, 8), Teodorescu A. (VII: 834, E. G.: 663), Tripsa I. (VII: 822, E. G.: 662, 3, 4).

Clasa a VIII-a: Cârstea D. M. (VIII: 730, 43, 4, E. G.: 664, 90, 3), Dilski M. C. (E. G.: 656), Grigoraş G. (E. G.: 656), Nedelcu U. (VIII: 730), Pavica V. (VIII: 725, 7), Popescu I. B. (VIII: 730, 53, 4, E. G. 6624, 5, 6, 95), Sintescu V. M. (VIII: 728), Stan A. (VIII: 730).

Liceul „C. Diaconovici-Loga", Timişoara.

Clasa a VII-a: Tincu C. C. (VII: 732, E. G.: 677, 86).

Gimnaziul Mixt „Oituz", Târgu-Ocna.

Clasa a IV-a: Avădani V. (IV: 712), Baican I. IV: 709, 12), Balcanu Aurora (IV: 712), Ciurdea Aurelia (IV: 709, 12), Gosav M. I. (IV: 709, 12), Răileanu C. (IV: 709, 12).

Liceul „Tudor Vladimirescu", Târgu-Jiu.

Clasa a VIII-a: Bălănescu G. G. (VIII: 746, 7, 8, 9, 50).

Liceul „Sf. Haralambie", Turnu-Măgurele.

Clasa a VIII-a: Andrei S. A. (VIII: 743), Martin D. C. (VIII: 730, 1, 3, 4, 5, 7, 8), Roşu S. A. (VIII: 730).

Liceul „Traian", Turnu-Severin.

Clasa a VIII-a: Cleanoveanu N. A. (VIII: 731, 2, 3, 8, Mănescu G. N. (E. G. 686, 7, 8, 9, 97).

Clasa a VII-a: Aldescu T. M. (E. G.: 662, 7), Pârşan M. (E. G.: 663, 7).

Elevi particulari.

Clasa a VIII-a: Barbu A. I. (VIII: 726, 7, 8, 9, 32, 42, E. G.: 663, 7).

EXERCIȚII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 August 1945

Clasa a III-a. *Exerc. 285.* Se consideră trei cercuri (C'), (C''), (C''') concentrice, cu centrul comun O. Dintr'un punct A al cercului (C') se duce o coardă $\overline{AB}$ în cercul (C') tangentă cercului (C''), punctul de contact fiind C, iar din C se duce în (C''') o coardă $\overline{CD}$ tangentă cercului (C'''), punctul de contact fiind E.

Cum trebue să fie alese razele R', R'', R''' ale celor trei cercuri, pentru ca dreptele AE și BD să treacă prin O.

Să se deducă lungimile coardelor $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$, știind că $R''' = 1$ cm.

O. N. Ț.

III. 286. Intr'un cerc (O) este înscris un exagon regulat ABCDEF. Pe laturile exagonului, socotite diametre, se construesc către interior semicercuri, care prin intersecțiile lor determină punctele A', B', C', D', E', F'. Să se arate, că poligonul A'B'C'D'E'F' este de asemenea exagon regulat și să se calculeze raportul ariilor celor două exagoane regulate.

O. N. Ț.

III. 287. Se dă un romb ABCD, având

$$\overline{AC} = 2m,\ \overline{BD} = 2m\ (m > n).$$

Pe $\overline{AC}$, ca diametru, se construește cercul (O), care taie prelungirile laturilor $\overline{CB}$, $\overline{CD}$ în E, F, iar prelungirile laturilor $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ în G, H. Să se arate, că patrulaterul EGHF este un dreptunghiu și să i se calculeze *perimetrul* și *aria* lui. Aplicație $m = 108$, $n = 45$.

O. N. Ț.

Clasa a IV-a. *Exerc. 735.* Aria unui trapez isoscel este 132 cm^2, laturile neparalele împreună cu înălțimea fac 17 cm. Se mai știe, că, dacă se pune cap la cap pe o dreaptă de 13 ori înălțimea de o parte și de 12 ori una din laturile neparalele de altă parte se obține două segmente egale.

Să se afle lungimile celor două baze ale trapezului isoscel și să se calculeze apoi lungimile diagonalelor lui.

O. N. Ț.

IV. 736. Două poligoane asemenea ABCDE şi A'B'C'D'E' sunt astfel aşezate în plan, că perechile de laturi omoloage (AB, A'B') şi (BC, B'C') sunt paralele şi de acelaşi sens. Fie I şi I' intersecţiile perechilor de drepte (AC, BE) şi (A'C', B'E').

Să se arate, că dreptele AA', BB', CC', DD', EE' se întâlnesc în acelaşi punct O pe dreapta II'.

Ştim că: $\overline{AB}=15$ cm; $\overline{BC}=13$ cm; $\overline{CD}=14$ cm; $\overline{DE}=17$ cm; $\overline{EA}=7$ cm; $\overline{AC}=18$ cm; $\overline{A'B'}=11$ cm şi că $\overline{II'}=23$ cm, să se calculeze distanţa x a punctului O la I şi perimetrele celor două poligoane date.

Să se examineze cazul când poligoanele date sunt în două plane paralele.

O. N. Ţ.

IV. 737. Se dă patratul ABCD cu centrul O şi lungimea laturii a. Să se determine lungimea x, astfel că, prelungind diagonalele BD şi AC cu segmentele $\overline{CM}=\overline{DN}=x$, lungimea segmentului $\overline{MN}$ să fie o lungime dată l. Fie P şi R intersecţiile perechilor de drepte (BM, CN) şi (AN, DM). Să se găsească lungimea y a segmentului $\overline{PR}$. Caz particular $l=a\sqrt{2}$.

O. N. Ţ.

IV. 738. O piramidă regulată exagonală SABCDEF are latura bazei $\overline{AB}=5$ cm şi înălţimea $\overline{SO}=16$ cm. Se proiectează piciorul O pe feţele laterale SAB, SBC, SCD, SDE, SEF, SFA respectiv în A', B', C', D', E', F'. Să se arate, că piramida SA'B'C'D'E'F' este o piramidă regulată şi să se calculeze volumele şi suprafeţele totale la ambele piramide regulate.

O. N. Ţ.

Clasa a V-a. *Exerc. 878.* Două cercuri secante (O) şi (C) cu razele R şi r au centrele la distanţa d. Coarda comună $\overline{MN}$ prelungită taie tangenta comună $\overline{AB}$ în P. Să se afle lungimea segmentului $\overline{PM}$ în funcţie de R r, d.

Să se particularizeze rezultatul în cazurile:

a) Cercurile (O) şi (C) sunt ortogonale;

b) Unul din cercuri (de exemplu (O)) trece prin centrul celuilalt.

Să se găsească şi direct rezultatele obţinute.

O. N. Ţ.

V. 879. Intr'un cerc (O), cu raza R, este înscris triunghiului oarecare ABC. Bisectoarea $\overline{AA'}$ a unghiului BAC taie arcul BC în M. Paralela dusă din M la AB taie cercul (O) a doua oară în N. Să se calculeze în funcţie de laturile triunghiului ABC aria patrulaterului AMCN.

O. N. Ţ.

V. 880. Intr'un cerc (O) cu raza R sunt înscrise trapezele pentru care suma celor două baze este egală cu o lungime dată *a*. Să se găsească acela dintre trapeze a cărui *arie* are o valoare dată A. Discuţie.

O. N. Ţ.

V. 881. Să se rezolve sistemul

$$\left|\begin{array}{l} x - y = n \\ \sqrt{a^2 - x^2} \mp \sqrt{a^2 - y^2} = m. \end{array}\right.$$

O. N. Ţ.

V. 882. Fie un cerc (O) de rază R şi un diametru al său $\overline{AB}$. Pe acest diametru luăm un punct P. Fie C şi D mijloacele segmentelor $\overline{AP}$ şi $\overline{PB}$. Perpendicularele în C şi D pe AB taie cercul în M şi N, punctele M şi N fiind aşezate unul de o parte, altul de alta a diametrului $\overline{AB}$.

Să se determine poziţiile punctului P, pentru care coarda $\overline{MN}$ trece prin P.

O. N. Ţ.

Clasa a VI-a. *Exerc. 896.* Să se rezolve un triunghiu cunoscând un unghiu, o mediană şi raza cercului înscris.

M. G.

VI. 897. Să se rezolve un triunghiu cunoscând două mediane şi raza cercului înscris.

M. G.

VI. 898. Să se rezolve un triunghiu cunoscând două bisectoare şi raza cercului înscris.

M. G.

VI. 899. După două vase ancorate pe mare, P şi Q este văzută înălţimea deasupra planului orizontal (definit de nivelul mării) un balon captiv B respectiv sub unghiurile $\alpha = 60^0$, $\beta = 30^0$, iar din proiecţia C pe acelaşi plan orizontal a verticalei balonului B este văzută distanţa celor două vase sub unghiul $\gamma = 45^0$. Ştiind că înălţimea balonului B deasupra nivelului mării este 1 km, să se calculeze distanţa celor două vase P şi Q.

GH. P.

VI. 900. Intr'un triunghiu oarecare avem relaţia

$$\frac{3 + \Sigma \cos A}{\Sigma \sin A} = \Sigma \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

O. N. Ţ.

VI. 901. Se dă un cerc (O) cu raza R şi centrul O; diametrul său $\overline{AB}$, un punct M pe prelungirea razei $\overline{OA}$ la distanţa $\overline{OM}$ egală cu latura patratului înscris în cercul (O) şi un punct N pe prelungirea razei $\overline{OB}$ la distanţa $\overline{ON} = 2R$. Tangentele din M şi N la cercul (O), de aceeaşi parte a lui AB, se taie în P. Se roteşte apoi întreaga figură în jurul axei AB. Să se calculeze:

a) Suprafeţele laterale şi volumele celor două conuri înăscute, limitate la cercul descris de punctul P.

b) Suprafeţele zonelor sferei (O), cuprinse între cercurile de contact ale celor două conuri cu sfera şi cercul punctului P.

O. N. Ţ.

Clasa a VII-a. *Exerc. 851.* Se dă funcţia

$$y = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} - \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

Să se arate, că

$$xy(a^2 - x^2) - a^2y' = (y + y')(a^2x - x^3 - a^2).$$

I. I. S.

VII. 852. Să se studieze variaţia funcţiei

$$y = \pm\sqrt{-2x^2 + 3x - 1}$$

şi să se reprezinte această variaţie.

Să se arate, că tangentele la curbă în punctele $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ şi (1, 0) sunt paralele cu axa OY.

GH. P.

VII. 853. Să se studieze variația funcției

$$\sqrt{2-y} = \cos x + \sin x.$$

C. I. Ț.

VII. 854. Se dau funcțiunile

$$y_1 = x^2 + px + q \quad , \quad y_2 = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^2 + p\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) + q.$$

Să se găsească relația între abscisele punctelor extreme.

C. I. B.

VII. 855. Se dă funcțiunea

$$f(x, y) = (x - ay)^3 (x - by)^3 (ax^2 + xy + by^2).$$

Să se calculeze

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to 1}} \frac{f''_{x^2}(x, y)}{f''_{y^2}(x, y)} \quad \text{și} \quad \lim_{\substack{x \to b \\ y \to 1}} \frac{f''_{x^2}(x, y)}{f''_{xy}(x, y)}.$$

C. I. B.

VII. 856. Să se figureze curbele date de funcțiunile

$$y = x^2 + 5x + 6 \quad ; \quad x = y^2 + 5y + 6$$

și să se afle punctele lor comune.

C. I. B.

VII. 857. Să se arate că

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & y_1 \\ x_2^2 + y_2^2 & y_2 \end{vmatrix}^2$$

$$= (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2].$$

N. M.

Clasa a VIII-a. *Exerc. 763.* O paralelă Δ la una din asimptote întâlnește o iperbolă în punctul M. Tangenta în M la iperbolă taie aceeași asimptotă în N.

Se cere locul geometric al intersecției dreptei Δ cu paralela dusă prin N la a doua asimptotă.

G. D. S.

VIII. 764. Se dă un cerc cu raza r şi un diametru D al său, fix. Să se afle locul punctului M, care are *raportul* dintre puterea sa faţă de cerc şi patratul distanţei până la diametrul D, constant şi egal cu k.

Se vor considera cazurile $k \leqslant 1$ şi se vor interpreta rezultatele.

G. D. S.

VIII. 765. Cercul, elipsa şi iperbola de ecuaţiile următoare:

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - \frac{a^2}{\alpha}x - \frac{b^2}{\beta}y = 0;$$

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$(3) \quad (a^2 - b^2)(x^2 - y^2) - (a^2 + b^2)\left(\frac{a^2}{\alpha}x + \frac{b^2}{\beta}y\right) + 2a^2b^2 = 0$$

au o coardă comună.

N. M.

VIII. 766. Există pe o elipsă ori iperbolă de centru O, un punct M, astfel că dacă tangenta în M la o conică taie axa mare în T să avem $\overline{OM} = \overline{MT}$?

N. M.

VIII. 767. Fie A fix pe axa Ox şi B variabil pe Oy. Să se afle locul geometric al simetricului originii faţă de dreapta AB.

N. M.

VIII. 768. Fie MT, MT' tangentele duse dintr'un punct M la cercul O şi A, B intersecţiile lui MO cu cercul, A fiind între O şi M.

Se duce prin A paralela la MT', care întâlneşte pe O în N şi se notează cu C intersecţia lui NT cu AB. Triunghiul ATC este isoscel.

GH. B.

VIII. 769. Să se determine λ aşa fel ca ecuaţiile

$$3x^3 + \lambda x^2 + 2x + 1 = 0 \quad ; \quad 3x^2 + \lambda x - 1 = 0$$

să aibă o rădăcină comună. Să se rezolve ecuaţiile.

I. I. S.

VIII. 770. Să se determine a şi b din ecuaţia

$$2x^4 - 17x^3 + ax^2 - 57x + b = 0,$$

ştiind că admite două rădăcini inverse şi una dublă. Să se rezolve ecuaţia.

I. I. S.

Exerciţii Generale. *Exerc. 708.* Dacă n este o valoare apropiată a rădăcinii cubice a lui N, atunci

$$n + \frac{N - n^3}{3n^2}$$

este o valoare mai apropiată. I. L.

E. G. 709. Dacă n este o valoare apropiată a rădăcinii bipatrate a lui N, atunci

$$\frac{3n}{4} + \frac{N}{4n^3}$$

este o valoare mai apropiată. I. L.

E. G. 710. Care sunt patratele pseudo-simetrice de cinci cifre?

I. L.

E. G. 711. Care sunt cuburile pseudo-simetrice de cinci cifre?

I. L.

E. G. 712. Care sunt bipatratele pseudo-simetrice de cinci cifre?

E. G. 713. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia

$$x^3 = 2y^2 + 1.$$ I. L.

E. G. 714. Să se examineze, dacă ecuaţia

$$8x^3 + 1 = y^2$$

are soluţii întregi. I. L.

E. G. 715. Să se examineze, dacă ecuaţia

$$x^4 - y^4 = z^2$$

are soluţii întregi. I. L.

E. G. 716. Să se arate, că ecuaţia

$$x^3 + y^3 = 6z^3$$

are soluţii întregi. I. L.

INSTRUCȚIUNI

Pentru redactarea și trimiterea soluțiunilor exercițiilor publicate în *Gazeta Matematică Supliment cu exerciții* se vor avea în vedere *Instrucțiunile* publicate în numerele 1, 2 și 3 pe copertă.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII și VIII, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității rezolvând și probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca Societății „Gazeta Matematică" au apărut și se găsesc următoarele:

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a științifică,* Ediția VIII-a . . . . . Lei 1.000

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Laiescu și G. Țițeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 100

X. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . . Lei 1.200

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 500 / pentru abonații G. M. și S. G. M. . . Lei 300

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 900

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica rațională . . . . . Lei 1.500

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediția II-a revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 700

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediția IV-a revăzută și mărită . . . . . Lei 1.000

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediția II-a revăzută și adăogită de **Gabriela Țițeica** . . . . . Lei 1.000

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a (Trigonometrie sferică). Revăzută și adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 400

XX. **I. I. Chițulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 600

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană și sferică cu aplicații la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . Lei 1.500

XXII. **G. Țițeica,** *Culegere de Probleme de analitică.* Ediția II. Partea II adăogită de **N. G. Botea** și **C. Ionescu-Bujor** . . . . . Lei 900

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 600

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile VII—IX de Aritmetică și Cartea X a Iraționalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 700

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile XI—XIII de Geometrie în spațiu: Cartea XIV a lui HYPSICLE și Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 500

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"
(Tipărită din fondul Anghel Saligny)

I. **Ion Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II-a). . . . . Lei 600

Biblioteca Matematică „GEORGE ȚIȚEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime și minime geometrice* . . . . . Lei 600

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 1.000 lei anual, se plătește înainte și începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele și toată corespondența se trimite pe adresa:

Societății „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviței No. 158. — București 2.

(Telefon: 7-3803).

M. O., IMPRIMERIA NAȚIONALĂ — C. 31.609.

8769

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL XI. No. 9 1 IUNIE 1945

9680

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 7-3809

GAZETA MATEMATICA
SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL XI. No. 9 — 1 IUNIE 1945

ABONAMENTUL LEI 300 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa a VI-a. *Exerc. 867. Se dă unghiul drept* XOY *şi se duc dela* OX *către* OY *dreptele* OU, OV.

Notăm:

$$\sphericalangle XOU = \alpha \ , \quad \sphericalangle UOV = \beta \ , \quad \sphericalangle VOY = \gamma.$$

Fie M *un punct pe* OY, N *proiecţia sa pe* OV, P *proiecţia lui* N *pe* OU *şi* Q *proiecţia lui* P *pe* OX. *Punem:*

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{OM}} = k.$$

a) *Să se arate că dacă* α, β, γ *sunt în progresie aritmetică, atunci:*

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \leqslant k \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

b) *Să se calculeze* α, β, γ *pentru ca să avem:*

$$k = \frac{3\sqrt{3}}{10}. \quad \textit{(Enunţ corectat).}$$

G. D. S.

Schiţă de soluţie. a) Conform enunţului avem:

$$\overline{ON} = \overline{OM}\cos\gamma \ ; \quad \overline{OP} = \overline{ON}\cos\beta \ ; \quad \overline{OQ} = \overline{OP}.$$

Inmulţindu-le se deduce uşor: $k = \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$.

Punem:

$$\alpha = \varphi - \theta \ ; \quad \beta = \varphi \ ; \quad \gamma = \varphi + \theta, \quad \text{deci} \quad 3\varphi = 90^0$$

sau $\varphi = 30^0$. In acest caz:

$$k = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(30^0 - \theta)\cos(30^0 + \theta) = \frac{\sqrt{3}}{4}(\cos 60^0 + \cos 2\theta)$$

$$\therefore \quad k = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2} + \cos 2\theta\right).$$

Deoarece $\alpha = 30 - \theta \geqslant 0$ rezultă $0 \leqslant \theta \leqslant 30^0$ şi deci:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \leqslant k \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

b) Când $k = \frac{3\sqrt{3}}{10}$ găsim imediat $\cos 2\theta = 0{,}7$ care ne dă $\theta = 22^0 47' 12''$.

Unghiurile sunt: $\alpha = 7^0 12' 48''$; $\beta = 30^0$; $\gamma = 52^0 47' 12''$.

* * *

In enunţul exerciţiului s'a omis, în datele numerice, atât la punctul *(a)* cât şi la punctul *(b)*, factorul $\frac{1}{4}$. Singurul care a observat acest lucru şi a dat soluţia completă a *exerciţiului corectat* este D-l ION I. CHIRIŢĂ din clasa a VI-a liceul „Cantemir Vodă".

Până la 1 Mai 1945 s'au primit soluţii bune dela:

Liceul „Samuil Vulcan", Beiuş-Bihor.

Clasa a VII-a: MOLDOVAN I. M. (VII: 830).

Liceul „Avram Iancu", Brad.

Clasa a VII-a: GANCEA I. C. (VII: 830, 1)

Liceul „N. Bălcescu", Brăila.

Clasa a VII-a: MATEESCU P. G. (VII: 830), NOVAC I. I. (VII: 828, 30, 1, 2, 8, E. G.: 681), ROŞCA G. (VII: 835, E. G.: 831), ZBARCEA D. R. (VII: 830, 1).

Clasa a VIII-a: BEŞCHEA R. (VIII: 746).

Colegiul Naţional „Sf. Sava", Bucureşti.

Clasa a VII-a: CHIRALEU S. I. (VII: 830), MORAITE A. (VII: 830), SĂVESCU A. M. (VII: 831).

Liceul „Aurel Vlaicu", Bucureşti.

Clasa a VII-a: BARBAIANI A. M. (VII: 822, 7), LEON A. M. (VII: 827, 30, 1), MARINESCU A. M. (VII: 830, 1).

Clasa a VIII-a: PETRESCU V. A. (VIII: 731, 2, 6, 7).

Liceul „C. Brâncoveanu" Bucureşti.

Clasa a VII-a: Cristu H. L. (VII: 830, 1), Constantinescu J. (VII: 830, 1).

Liceul „Gheorghe Lazăr", Bucureşti.

Clasa a VIII-a: Costescu L. L. (VIII: 759).

Liceul „Mihai Viteazul", Bucureşti.

Clasa a IV-a: Culcer S. M. (IV: 727, 8, 9).
Clasa a VIII-a: Popescu T. (VIII: 725, 30, E. G.: 662).

Liceul „Sf. Andrei", Bucureşti.

Clasa a VII-a: Chiraleu S. I. (VII: 850).

Seminarul Central Bucureşti.

Clasa a VIII-a: Mocanu M. P. (VIII: 746, 52, 8).

Liceul „Ştirbei-Vodă", Călăraşi.

Clasa a VII-a: Caraiani N. T. (VII: 830).

Liceul „D. B. Ştirbey", Câmpina.

Clasa a VIII-a: Filip G. P. (VIII: 759), Macavei A. E. (VIII: 746), Tăutu I. P. (VIII: 726, 7, 8, 9).

Liceul Militar Câmpulung-Muscel.

Clasa a VII-a: Bârzescu M. (VII: 838).

Liceul „Ioniţă Assan", Caracal.

Clasa a VII-a: Stroescu I. F. (VII: 830, 2).

Colegiul Naţional „Carol I", Craiova.

Clasa a VII-a: Braşoveanu D. G. (VII: 849), Puţureanu M. I. (VII: 828).

Liceul de fete „Elena Cuza", Craiova.

Clasa a VII-a: Cutieru V. Olga (VII: 830, 1).

Liceul „Fraţii Buzeşti", Craiova.

Clasa a VII-a: Cosmulescu V. (VII: 830).

Liceul „Ion Maiorescu", Giurgiu.

Clasa a VII-a: Bârzescu C. A. (VII: 830, 1), Şovărel G. G. (VII: 830. 1).

Liceul „Ştefan cel Mare", Piteşti.

Clasa a VIII-a: SINTESCU V. M. (VIII: 758).

Gimnaziul Mixt „Oituz", Târgu-Ocna.

Clasa a IV-a: AVADANU B. V. (IV: 708, 9, 10), BALCANU A. (IV: 708, 10), BĂICAN V. I. (IV: 708, 10), CIURDEA C. A. (IV: 708), GOSAV M. I. (IV: 708, 10), RĂILEANU I. C. (IV: 708, 10).

Liceul Militar „Mihai Viteazul", Timişoara.

Clasa a VII-a: TRIPŞA I. (VII: 828, 30, 1, 2, 8), VRÂNCEANU G. G. (VII: 832).

Liceul „Sf. Haralambie", Turnu-Măgurele.

Clasa a VIII-a: MARTIN D. C. (VIII: 716), ROŞU S. A. (VIII: 731, 2, 8).

Liceul „Traian" Turnu-Severin.

Clasa a VIII-a: MĂNESCU G. N. (VIII: 728).

EXERCIŢII PROPUSE

Soluţiile exerciţiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Septembrie 1945

Clasa a III-a. *Exerc 288.* In cercul (O), cu centrul O şi de rază cât unitatea, să se înscrie triunghiul echilateral ABC şi patratul ADEF. Laturile AB şi AC taie pe DF în M şi N, iar pe dreptele ED şi EF respectiv în G şi H. Dreptele ED şi EF taie pe BC în I şi L. Să se calculeze:

a) lungimile segmentelor $\overline{IL}$, $\overline{LC}$, $\overline{NF}$.

b) valoarea raportului $\frac{\overline{NH}}{\overline{AC}}$.

c) lungimea segmentului $\overline{GH}$.

O. N. Ţ.

III. 289. Se dă cercul (O) de rază egală cu unitatea şi diametrul $\overline{AB}$ al acestui cerc. Prin G şi H, mijloacele razelor $\overline{OA}$ şi $\overline{OB}$, se construesc coardele $\overline{CD}$ şi $\overline{EF}$ perpendiculare pe AB.

Fie M şi N două puncte pe aceste coarde, luate astfel ca

$$\frac{\overline{GM}}{\overline{MD}} = \frac{1}{2} \text{ şi } \frac{\overline{HN}}{\overline{NF}} = \frac{1}{2}.$$

Razele, ce trec prin punctele M şi N taie cercul (O) în P şi Q.

Să se calculeze *perimetrul* şi *aria* patrulaterului PCEQ.

O. N. Ţ.

III. 290. Fie cercul (O) de rază egală cu unitatea, $\overline{AB}$ un diametru al său, D mijlocul razei $\overline{OA}$, $\overline{CE}$ coarda perpendiculară pe AB în D. Luăm un punct M pe coarda $\overline{CE}$ astfel ca $\overline{CM} = 2\ \overline{ME}$. Fie G şi H extremităţile diametrului trecând prin M (punctul G fiind de aceeaşi parte cu M faţă de O), iar F extremitatea coardei $\overline{AF}$ trecând prin M.

Să se calculeze lungimile *laturilor* şi *diagonalelor*, precum şi *aria* patrulaterului AFHC.

O. N. Ţ.

Clasa a IV-a. *Exerc. 739.* Un agricultor are într'o zi învoiţi la muncă 15 bărbaţi şi 23 femei şi plăteşte seara 10.250 lei; a doua zi are la muncă 12 bărbaţi şi 28 femei şi plăteşte seara 10.600 lei, plătind aceeaşi plată pe zi ca în ziua precedentă. Cât a plătit pe zi unui bărbat şi cât unei femei?

(Să se rezolve şi pe cale pur aritmetică).

O. N. Ţ.

IV. 740. Se dă o piramidă patrulateră SABCD, cu baza un trapez dreptunghiu ABCD, vârful S proiectându-se în C. Ştiind că baza mare a trapezului $\overline{DC} = 4{,}4$ dm, înălţimea trapezului $\overline{DA} = 13{,}2$ dm, că a doua latură neparalelă este egală cu suma bazelor trapezului şi că înălţimea piramidei $\overline{SC} = 3{,}3$ dm, să se calculeze *suprafaţa totală* şi volumul piramidei SABCD.

Să se calculeze asemenea lungimile muchiilor laterale.

O. N. Ţ.

IV. 741. Se dă o piramidă SABCD, baza ABCD fiind un trapez isoscel cu bazele $\overline{AD} = 15$ cm, $\overline{BC} = 11$ cm şi înălţimea $\overline{BE} = 12$ cm. Vârful S al piramidei se proiectează în O intersecţia diagonalelor AC, BD. Fie B', C' proiecţiile vârfurilor B, C pe faţa SAD, iar H, G intersecţiile dreptei B'C' cu SA, SD. Paralela dusă din H la AB taie în I pe SB, iar paralela dusă din G la DC taie în L pe SC. Să se calculeze *raportul ariilor totale* şi *raportul volumelor* piramidelor SABCD şi SHILG, ştiind înălţimea piramidei, $\overline{SO} = 20$ cm.

O. N. Ţ.

IV. 742. Se dau o sferă (O) cu diametrul $\overline{AOB}$ şi o sferă (I) tangentă interior sferei (O) cu diametrul $\overline{OIB}$. Să se calculeze *suprafaţa totală* şi *volumul* conului cu vârful în A înscris în sfera (O) şi circumscris sferei (I). Asemenea să se calculeze *suprafaţa laterală* şi *volumul* trunchiului de con cuprins între cercul de tangenţă al conului cu sfera (I) şi baza conului.

O. N. Ţ.

Clasa a V-a. *Exerc. 883.* Să se afle două numere a căror medie aritmetică este 656,5 şi a căror medie geometrică este 606.

N. M.

V. 884. Se dă trapezul isoscel ABCD cu laturile egale AC şi BD. Pe latura AC, între A şi C se ia un punct M. Fie N un punct luat între B şi D pe latura BD aşa încât $\overline{CM} = \overline{BN}$.

Se complectează paralelogramul MNBP. Să se demonstreze că CP este perpendiculară pe AB.

Gh. B.

V. 885. Fie M şi N mijloacele diagonalelor $\overline{AC}$ şi $\overline{BD}$ ale unui trapez ABCD. Latura AB este întâlnită în C' şi D' de CN şi DM. Să se arate, că $\overline{AC'}$ şi $\overline{BD'}$ sunt egale.

Gh. B.

V. 886. Pe dreptele paralele Δ_1, Δ_2 se iau punctele fixe A şi B. Fie C un punct pe dreapta AB, iar M, M' două puncte pe Δ_1 simetrice faţă de A. Dreapta M'C taie pe Δ_2 în N, iar MN întâlneşte pe AB în C'. Dacă P este un punct pe cercul de diametru $\overline{CC'}$, atunci PC, PC' sunt bisectoarele unghiului APB.

GH. B.

V. 887. Fie $A_1A_2 \ldots A_7A_8$ un octogon regulat. Se notează cu L, M, N intersecţiile (A_3A_4, A_5A_6), (A_2A_4, A_5A_7), (A_1A_4, A_5A_6), Să se arate, că raportul razelor cercurilor A_4LM, A_4MN este egal cu $\sqrt{3+\sqrt{2}}$.

GH. B.

V. 888. Dacă a şi b sunt pozitive, suma

$$x + a + b + \sqrt{(x-a)(x-b)}$$

este pozitivă, oricare ar fi x.

GH. B.

Clasa a VI-a. *Exerc. 902.* Să se rezolve un triunghiu cunoscând o înălţime şi razele cercurilor înscris şi circumscris.

M. G.

VI. 903. Un pândar aşezat la pământ într'un punct A, observă, la un anumit moment, un avion I sub un unghiu de elevaţie (unghiul format de AI cu orizontul punctului A) de 60°. Un alt pândar B se găseşte pe un deal, în direcţia bisectoarei unghiului de elevaţie a lui A, la depărtarea 1000 m faţă de A, astfel ca $\widehat{IBA} = 135°$. Să se calculeze înălţimea avionului, în acel moment, faţă de planul orizontal al lui A.

GH. P.

VI. 904. Într'un paralelogram fiind dat unghiul A şi ştiind că laturile paralelogramului sunt proporţionale cu numerele m, n, iar perimetrul unuia din triunghiurile formate de diagonală egal cu $2l$, să se afle *aria* paralelogramului, *diagonalele lui* şi unghiul acestor diagonale.

Aplicaţie $m = 5$, $n = 7$, $l = 21\ m$, $A = 120°$.

O. N. Ţ.

VI. 905. Prizma patrulateră dreapă ABCDEFGH are baza EFGH un trapez înscris într'un semicerc de rază 6,5 dm. Diagonala trapezului de bază are lungimea de 12 dm, iar înălțimea prizmei este de 9 dm.

Să se calculeze:

a) suprafața totală și volumul prizmei ABCDEFGH;

b) lungimile diagonalelor fețelor laterale ale prizmei;

c) lungimea diagonalei $\overline{DF}$ a prizmei și înclinarea acestei diagonale pe planul bazei;

d) înclinarea diagonalei DE a fetei ADHE pe planul diagonal BDHF.

O. N. Ț.

VI. 906. Într'un cerc (O) de rază R se dă o coardă $\overline{AB}$ de lungime $l = R\sqrt{4}$. Pe diametrul CD, perpendicular pe AB, de cealaltă parte față cu centrul se ia punctul S astfel că $\overline{OS} = \frac{R}{2}$ și fie G punctul unde AS taie a doua oară cercul.

Se rotește întreaga figură în jurul axei CD.

Să se calculeze:

a) suprafața și volumul trunchiului de con născut în această rotație complectă;

b) raportul suprafețelor laterale și al volumelor celor două conuri născute, cu vârful în S.

(Se va nota cu α unghiul de deschidere al celor două conuri cu vârful în S).

O. N. Ț.

VI. 907. Se dă o sferă (O) de rază R și centru O, un diametru $\overline{CD}$ al acestei sfere și punctul S pe prelungirea razei $\overline{OC}$, astfel ca $\overline{CS} = \frac{R}{2}$. Să se determine unghiul de deschidere al unui con de rotație, cu vârful în S, care să taie sfera după două cercuri de diametre $\overline{AA'}$ și $\overline{BB'}$ astfel ca $\frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}} = 2$.

Să se calculeze apoi suprafața laterală și volumul trunchiului de con înscris în sferă având cele două cercuri drept baze, precum și suprafața zonei în care este înscris trunchiul de con.

O. N. Ț.

Clasa a VII-a. *Exerc. 858.* Să se studieze variația funcției

$$y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ x & 0 & 1 & 0 & 4 \\ x & x & 0 & 1 & 5 \\ x & x & x & 0 & 6 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ x & 0 & 1 & 4 \\ x & x & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

G. D. S.

VII. 859. Să se arate că funcțiunea

$$y = \operatorname{arc\,tg} x$$

verifică ecuația $y^{IV} y' - 2y''' y'' + 8y'' y'^3 = 0.$

C. I. B.

VII. 860. Să se arate că și funcțiunea

$$y = \operatorname{arc\,tg}(ax + b)$$

verifică ecuația problemei precedente.

C. I. B.

VII. 861. Se consideră progresia aritmetică cu termeni pozitivi și crescători

$$\div a_0, a_1, a_2 \ldots a_n.$$

Să se arate că funcțiunile de forma

$$y_i = \operatorname{arc\,tg}(x - a_i) - \operatorname{arc\,tg}(x - a_{n-i}),$$

au maximele coliniare.

C. I. B.

VII. 862. Dacă M_i este maximul funcțiunii y_i, iar $n = 2p - 1$, să se calculeze

$$\sum_{i=0}^{p-1} \operatorname{tg} \frac{M_i}{2}.$$

C. I. B.

VII. 863. Să se discute sistemul:

$$\lambda x - 2y + z = \alpha \quad , \quad x + y + 2z = 5 \quad , \quad -\lambda x + 7y + 4z = 15.$$

N. M.

VII. 864. Să se discute sistemul:

$$x \sin\alpha + y \cos\alpha - z = 0 \quad , \quad x \cos\alpha - y \sin\alpha = 0,$$
$$x \sin\alpha - y \cos\alpha + z \cos 2\alpha = 0.$$

N. M.

Clasa a VIII-a. *Exerc. 771.* Se dă rombul ABCD având diagonalele de 4 cm şi 6 cm. Se cere:

1. Să se deseneze acest romb, luând ca axe de coordonate diagonalele sale şi ca unitate de măsură 1 cm.

2. Se uneşte câte un punct de pe fiecare din diagonalele rombului, respectiv punctele (1, 0) şi (0, 2), cu cele două extremităţi ale celeilalte diagonale; să se arate, că cele patru drepte astfel obţinute determină un patrulater inscriptibil.

3. Să se determine centrul şi raza cercului circumscris.

GH. P.

VIII. 772. In sistemul axelor coordonate xOy avem punctele $A(-a, 0)$, $B(0, a)$. Cercul de centru A, rază AB, taie bisectoarea cadranului întâi în C. Unghiul BAC are 30^0.

N. M.

VIII. 773. Dreapta

$$\lambda x + y = a$$

este tangentă elipsei cu centrul în origine, de semiaxe a, b. Să se determine λ şi punctul de intersecţie.

N. M.

VIII. 774. Fie

$$f(x) = 2\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} - 3\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}.$$

Să se arate că

$$\int \operatorname{tg} f(x)\, dx = \log c \sqrt{x^2 + 2x + 7}.$$

N. M.

VIII. 775. Se dă parabola

$$y^2 - 2px = 0$$

şi o dreaptă fixă D paralelă cu axa ei. Tangentele la parabolă, duse dintr'un punct M al dreptei D, întâlnesc tangenta la vârf în punctele P şi Q.

Se cere locul geometric al intersecţiei perpendicularelor ridicate în P şi Q respectiv pe MP şi MQ, când punctul M descrie dreapta D.

G. D. S.

VIII. 776. Fie M un punct situat pe parabola de vârf O, având axă Ox, tangentă în vârf la Oy și de directoare (D).

Tangenta în M taie pe Ox în U, pe Oy în V. Fie încă N proiecția lui M pe (D) și P simetricul lui M față de Oy. Să se arate că lungimea $\overline{MT}$ a tangentei din M la cercul descris pe UV ca diametru este medie geometrică între segmentele $\overline{MN}$, $\overline{MP}$.

N. M.

VIII. 777. Fie polinoamele $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$ de gradul 3 și a_1, a_2, a_3 cantități distincte reale. Să se arate că polinoamele

$$F_1(x) = \begin{vmatrix} P_1'(x) & P_1(a_1) & P_1(a_2) & P_1(a_3) \\ P_2'(x) & P_2(a_1) & P_2(a_2) & P_2(a_3) \\ P_3'(x) & P_3(a_1) & P_3(a_2) & P_3(a_3) \\ P_4'(x) & P_4(a_1) & P_4(a_2) & P_4(a_3) \end{vmatrix},$$

$$F_2(x) = \begin{vmatrix} P_1''(x) & P_1(a_1) & P_1(a_2) & P_1(a_3) \\ P_2''(x) & P_2(a_1) & P_2(a_2) & P_2(a_3) \\ P_3''(x) & P_3(a_1) & P_3(a_2) & P_3(a_3) \\ P_4''(x) & P_4(a_1) & P_4(a_2) & P_4(a_3) \end{vmatrix}.$$

nu pot avea rădăcini comune.

C. I. B.

VIII. 778. Dacă $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$ sunt polinoame de gradul I, $F_1(x)$ și $F_2(x)$ din problema precedentă sunt identici nuli.

C. I. B.

Exerciții Generale. *Exerc. 717.* Fiind dată fracția continuă

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}$$

să se calculeze diferența între redusa de ordinul al patrulea și prima redusă.

I. L.

E. G. 718. Să se calculeze fracţia continuă simetrică

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}}}}}}}$$

I. L.

E. G. 719. Fiind dată o fracţie continuă simetrică, dacă $\left(\frac{f_p}{g_p}\right)$ este redusă de ordinul p, atunci expresia

$$f_{2n}\, g_{2n-1} + f_{2n+1}\, g_{2n}$$

este o sumă de două patrate. I. L.

E. G. 720. Dacă A este un număr întreg oarecare, atunci

$$A^{360} - 1 = \mathcal{M}.\, 10800.$$ I. L.

E. G. 721. Să se arate, că două patrate nu pot avea acelaşi indicator. I. L.

E. G. 722. Care este cel mai mic număr de trei cifre al cărui indicator este cub perfect? I. L.

E. G. 723. In ce caz avem

$$[\varphi_1(N)]^m = \varphi_m(N^m),$$

unde $\varphi_i(N)$ este indicatorul de ordinul i al lui N?

I. L.

E. G. 724. Care sunt numerele de două cifre, în progresie aritmetică de raţie 4, care au acelaşi indicator? I. L.

E. G. 725. Dacă $p_1, p_2, \ldots, p_n$ reprezintă numerele prime cu N şi mai mici ca el şi dacă

$$P_1 = p_1 . p_2 \ldots p_{\frac{n}{2}} \text{ şi } P_n = p_{\frac{n}{2}+1} \cdot p_{\frac{n}{2}+2} \cdots p_n,$$

atunci avem

$$P_n^4 - P_1^4 = \mathcal{M}\, N.$$ I. L.

INSTRUCŢIUNI

Pentru redactarea şi trimiterea soluţiunilor exerciţiilor publicate în *Gazeta Matematică Supliment cu exerciţii* se vor avea în vedere *Instrucţiunile* publicate în numerele 1, 2 şi 3 pe copertă.

Drepturile de reproducere rezervate Societăţii «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII şi VIII, cu bogată activitate la această revistă îşi pot lărgi cadrul activităţii rezolvând şi probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca Societăţii „Gazeta Matematică" au apărut şi se găsesc următoarele:

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică,* Ediţia VIII-a . . . . . Lei 1.000

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 100

X. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . . Lei 1.200

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învăţăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . pentru particulari . . . . . Lei 500 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 300

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 900

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica raţionată . . . . . Lei 1.500

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 700

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 1.000

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 1.000

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 400

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 600

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . Lei 1.500

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de analitică.* Ediţia II. Partea II adăogită de **N. G. Botea** şi **C. Ionescu-Bujor** . . . . . Lei 900

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 600

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 700

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu: Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 500

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"

(Tipărită din fondul Anghel Saligny)

I. **Ion Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a). . . . . Lei 600

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 600

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 1.000 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158. — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ — C. 32.199.